Universidade de Aveiro
2015

Departamento de Matemática

ILDA MARIA DA SILVA BASTOS

MAGIA MATEMÁTICA COM NÚMEROS

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2015

ILDA MARIA
DA SILVA BASTOS

MAGIA MATEMÁTICA COM NÚMEROS

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Andreia Oliveira Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e do Professor Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

O júri

Presidente	**Professor Doutor Paolo Vettori**
	Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro
Vogal - Arguente Principal	**Professor Doutor Nuno Rafael Oliveira Bastos**
	Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Viseu
Vogal - Orientador	**Professor Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira**
	Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Aos meus orientadores, por todo o apoio, disponibilidade e incentivo que demonstraram. Também pelas sugestões de melhoria e partilha de saberes.

Aos meus alunos, familiares e amigos que me permitiram ensaiar alguns truques e me entusiasmaram com as suas reações.

À minha família, pelo apoio e compreensão em todas as horas.

palavras-chave Matemática, truque, número, mágico.

resumo

Esta dissertação pretende ser a compilação de alguns truques matemáticos que possam ser usados nas aulas de matemática do ensino básico e secundário, com o objetivo de motivar os alunos para esta área do conhecimento. Podem também ser usados, de forma lúdica, numa reunião de amigos, com pessoas de qualquer idade e condição social. Todos certamente se irão surpreender.

Os truques aqui apresentados nada têm de ilusório. Resultam apenas da simples aplicação de conhecimentos matemáticos e de propriedades numéricas, desvendados no final de cada truque.

keywords Mathematics, trick, number, magic.

abstract This dissertation aims to be a collection of some mathematic tricks that can be used in math classes to motivate the students. They can also be used, for fun, in social gatherings with people of different ages and backgrounds. They will certainly be surprised.
The tricks presented here are not illusory in any way. They simply result of the application of mathematical knowledge and numerical properties, explained at the end of each trick.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 DESCRIÇÃO

“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela.”

Albert Einstein

A palavra magia está muitas vezes associada ao efeito de fazer aparecer ou desaparecer objetos, muitas vezes através da ilusão de ótica. Também é frequente relacionar-se magia com feitiçaria e bruxaria, uma vez que muitos dos resultados observados são misteriosamente inexplicáveis.

A magia matemática é apenas a arte de usar propriedades matemáticas para surpreender e fascinar o público, de forma autêntica e “sem nada na manga”.

Esta arte, bem aplicada, pode ajudar a resolver algum do insucesso que se verifica nas nossas escolas do ensino básico e secundário. Citando Roger Bacon (filósofo inglês que deu bastante ênfase ao uso da matemática no estudo da natureza): “O abandono da matemática traz danos a todo o conhecimento. Pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas deste mundo”.

O abandono da matemática está frequentemente relacionado com a falta de motivação que origina falta de dedicação e empenho à disciplina, que por sua vez gera insucessos repetidos. Se conseguirmos atuar no início desta “cadeia” poderá ser mais fácil envolver os alunos e fazer com que sejam participantes ativos nas aulas.

A escolha do tema “Magia Matemática com Números” tem por base a perceção, que a minha prática letiva me tem dado, de que a desmotivação dos alunos é uma das razões que leva ao insucesso. Os truques matemáticos podem servir como motivação para a disciplina de matemática e/ou de introdução a alguns conteúdos abordados ao longo do ensino básico e secundário, despertando nos alunos a curiosidade e a vontade de desvendar o truque, percebendo a matemática que está por trás.

1.2 BREVE EVOLUÇÃO DA MAGIA MATEMÁTICA

A magia matemática é uma vertente da matemática recreativa que combina matemática e magia. Os truques de magia matemática funcionam baseados em propriedades matemáticas. Apesar de a matemática ser raramente associada à magia, a combinação de matemática e magia tem um grande potencial educativo e de entretenimento.

Wade H. Sherard, no seu livro "Mathemagic in the classroom", refere que, historicamente, se pode considerar que a magia matemática teve origem no século XVII. Vários truques aritméticos estão incluídos em "Problèmes plaisons et délectables" de Claude Gaspar Bachet publicado em 1612 e 1624 e em "Créations mathématiques et physiques" publicado em 1694, em Paris. Alguns dos problemas apresentados por Bachet foram baseados em escritos de matemáticos anteriores como Alcuin, Luca Pacioli di Burgo,Tartaglia e Cardano.

No manuscrito "De Viribus Quantitatis", de Luca Pacioli, (1490), é descrito pela primeira vez um truque relacionado com matemática. Girolamo Cardano, no seu livro "Subtilitate rerum", (1551), apresentou pela primeira vez a descrição de um truque de cartas.

No entanto, o interesse atual pela magia matemática pode ser atribuído aos escritos de W W Rouse Ball (1850-1925) e Martin Gardner (1914-2010), grandes impulsionadores da matemática recreativa.

Ball foi professor no Trinity College em Cambrige e publicou o seu clássico "Mathematical Recreations & Essays", em 1892, que se tornou uma fonte de material em magia matemática.

Martin Gardner, falecido em 2010, ficou conhecido pela publicação dos artigos "Mathematical Games" na revista Scientif American entre 1957 e 1981. Muitos desses artigos eram dedicados à magia matemática. O seu livro "Mathematics, Magic and Mistery", publicado pela primeira vez em 1956, é talvez a primeira etapa da atual magia matemática. Muitos dos seus livros publicados posteriormente e relacionados com a matemática recreativa também contêm muito material relacionado com magia matemática.

A literatura de magia matemática cresceu rapidamente e hoje inclui uma grande variedade de truques desde os mais simples até aos mais elaborados. Podemos encontrá-los, por exemplo em "Mathemagic in the Classroom" (1983 e 1998) de Wade

Sherard, “Magia Matemática” (2012) de Miguel Capó Dolz, “Xavier e a Magia Matemática” (2010) de Paulo Afonso e “A Magia da Matemática” (2010) de Ilydio Pereira de Sá. Existem também muitas publicações onde podemos encontrar diversos desafios matemáticos, atividades lúdicas, curiosidades numéricas, quebra-cabeças, etc.

1.3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada nesta dissertação consistiu numa longa pesquisa de truques abordando vários conteúdos matemáticos e na reflexão sobre os conceitos matemáticos e as propriedades numéricas que estão na base da “magia”.

Os truques foram agrupados de acordo com os conteúdos matemáticos que envolvem, ficando assim a dissertação organizada por capítulos.

No início de cada capítulo aparecem os respetivos conteúdos matemáticos e algumas propriedades relacionadas com os mesmos. Seguem-se as descrições dos truques e, no final de cada um, a respetiva explicação matemática.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Capítulo 1 – Introdução: faz-se uma breve reflexão sobre magia matemática e a sua evolução, aborda-se a metodologia utilizada e a constituição da dissertação.

Capítulo 2 – Sucessão de Fibonacci: introduz-se a sucessão de Fibonacci e apresentam-se algumas das suas propriedades. No final apresentam-se alguns truques baseados nessas propriedades. Estes truques estão particularmente relacionados com o tema das sucessões, que atualmente se leciona no 11º ano de escolaridade.

Capítulo 3 – Mudanças de base: explica-se a forma de conversão de um número escrito na base 10 para outra base e apresenta-se uma tabela com os números inteiros de 0 até 63 escritos na base 2. Posteriormente são apresentados alguns truques e a respetiva explicação matemática. Estes truques podem ser apresentados aos alunos do 6º ano, aquando do estudo das potências de expoente natural, e aos alunos dos anos seguintes.

Capítulo 4 – Progressões aritméticas: apresenta-se a definição e algumas propriedades das progressões aritméticas. São também apresentadas as sequências dos números triangulares e dos números quadrados, seguindo-se alguns truques e respetiva explicação. Estes truques podem ser apresentados no 6º ano, quando se abordar as sequências e regularidades, ou no 11º ano quando se abordar as sucessões.

Capítulo 5 – Números múltiplos de nove: faz-se uma referência aos critérios de divisibilidade, deduzindo-se o critério de divisibilidade por 9. Faz-se também referência à raiz digital de um número e ao "noves fora" que já há alguns anos caiu em desuso. Seguem-se os truques e respetiva explicação, que poderão ser aplicados em qualquer ano de escolaridade (a partir do 2º ano), não só para exercitar o cálculo mental, mas também para exercitar os algoritmos da multiplicação e da divisão, no caso de se optar por não fornecer calculadora para a realização dos truques.

Capítulo 6 – Expressões algébricas: faz-se uma breve introdução à álgebra e apresentam-se alguns truques com a respetiva explicação. Dependendo do grau de complexidade das expressões algébricas, os truques apresentados podem ser aplicados aos alunos a partir do 5º ano de escolaridade.

Capítulo 7 – Miscelânea de truques: neste capítulo apresenta-se uma variedade de truques que poderão ser apresentados em diversos anos de escolaridade e que envolvem propriedades relativas a vários conteúdos. Na introdução é feita referência à Soma NIM pelo facto de estar na base de um dos truques apresentados.

Capítulo 8 – Conclusão.

Capítulo 2

SUCESSÃO DE FIBONACCI

2.1 INTRODUÇÃO

A sucessão de Fibonacci é uma sucessão de números inteiros não negativos, na qual cada termo corresponde à soma dos dois anteriores e os dois primeiros termos são iguais a 1 (ou a 0 e 1).

Considerando a versão mais comum, com os dois primeiros termos iguais a 1, obtêm-se os seguintes termos iniciais:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

A designação desta sucessão deve-se a Leonardo de Pisa (1180-1250), que ficou conhecido pelo nome de Fibonacci (filho de Bonaccio), e que foi um comerciante italiano que publicou a obra "*Liber abaci*" (1202) onde recomenda a utilização de métodos e procedimentos algébricos para a resolução de problemas matemáticos. Um dos problemas que é tratado nesta obra é o problema da reprodução dos coelhos que esteve na origem da famosa sucessão.

Existem diversas generalizações da sucessão de Fibinacci, como por exemplo as sucessões que verificam a mesma regra de recorrência, ou seja, em que cada termo da sucessão é a soma dos dois anteriores mas que diferem nos dois primeiros termos. Estas sucessões apresentam algumas propriedades muito interessantes.

2.2 O PROBLEMA DOS COELHOS

No livro referido anteriormente, Fibonacci introduziu um problema relacionado com a reprodução dos coelhos que viria depois a dar origem à sucessão que ficou conhecida pelo seu nome.

Ele imaginou um cenário com as condições ideais sob as quais os coelhos se poderiam procriar. O objetivo era responder à seguinte questão: Quantos pares de coelhos existirão daí a um ano?

Na formulação de Fibonacci eram fixados os seguintes pressupostos:

- No primeiro mês temos um coelho macho e um coelho fêmea. Estes dois coelhos acabaram de nascer.

- Um coelho só atinge a maturidade sexual ao fim de um mês.
- O período de gestação de um coelho dura um mês.
- Ao atingirem a maturidade sexual, a fêmea irá dar à luz todos os meses um coelho macho e um coelho fêmea.
- Neste período os coelhos não morrem.

Na sua demonstração Fibonacci concluiu que ao fim de alguns meses teria os seguintes resultados:

- Mês 0 - No início da experiência existe apenas um par de coelhos.
- Mês 1 – Após um mês, os coelhos acasalaram mas ainda não deram à luz (portanto existe somente um par de coelhos).
- Mês 2 – Neste mês já a fêmea deu à luz um par de coelhos. Existem agora dois pares de coelhos.
- Mês 3 – Depois de 3 meses, o par inicial de coelhos dá à luz mais um par de coelhos. Além disso, o segundo par acasala. Isto faz então um total de três pares.
- Mês 4 – Aos 4 meses, o par original tem mais um par de coelhos. O par nascido no mês 2 também dá à luz. O par de coelhos nascido no mês 3 acasala, mas ainda não dá à luz. Isto faz um total de cinco pares.
- Mês 5 – Aos 5 meses, todos os pares que nasceram até há dois meses dão à luz. Isto totaliza oito pares.
- ...

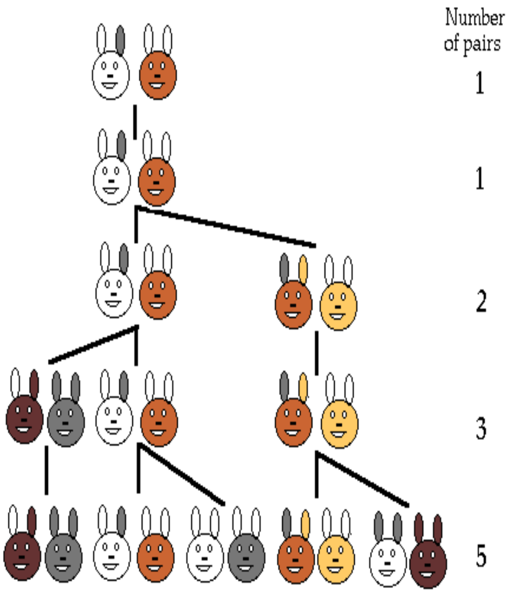


Figura 1 – A reprodução dos coelhos (http://www.educ.fc.ul.pt/)

Coloca-se então a questão de saber se é possível encontrar uma maneira de obter o número de coelhos num determinado mês.

Não é difícil. Como são necessários dois meses para que um novo par dê à luz, então cada par de coelhos que já existia há dois meses atrás irá dar à luz um novo par. Isto é, o número de novos pares de coelhos de cada mês, é igual ao número de pares de coelhos existentes dois meses antes. Além dos coelhos novos, há que ter em conta os que já existiam e que continuam vivos. Este número é o mesmo número de pares de coelhos que existiam no mês anterior.

Em conclusão, o número de pares de coelhos num determinado mês é a soma dos pares de coelhos existentes nos dois meses anteriores a este.

Assim, ao fim de um ano teríamos 144 casais de coelhos.

2.3 EXPRESSÃO PARA CALCULAR QUALQUER TERMO DA SUCESSÃO DE FIBONACCI

Se pretendermos calcular diretamente um determinado termo da sucessão podemos utilizar a expressão seguinte:

$$\boldsymbol{F_n} = \frac{\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Demonstração por indução:

Verificação para $n = 1$:

$$F_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Verificação para $n = 2$:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Hipótese de indução:

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad F_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} \quad , k \in IN$$

Tese:

$$F_{k+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}} \qquad , \quad c.p.d.$$

2.4 ALGUMAS PROPRIEDADES DA SUCESSÃO DE FIBONACCI

Apresentam-se a seguir duas propriedades relacionadas com a sucessão de Fibonacci generalizada: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, $a_1 \in IN_0$, $a_2 \in IN_0$.

A primeira propriedade é referente à soma dos n primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada.

A soma S_n , $n > 1$, dos n primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada é dada por:

$$\boldsymbol{S_n = a_{n+2} - a_2}$$

Demonstração:

Tem-se:

$$a_1 = a_3 - a_2$$

$$a_2 = a_4 - a_3$$

$$a_3 = a_5 - a_4$$

$$a_4 = a_6 - a_5$$

$$\dots$$

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

Ao somar e simplificar termo a termo todas estas igualdades obtém-se:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - a_2$$

No caso da sucessão de Fibonacci original obtém-se $S_n = a_{n+2} - 1$.

Fazendo um exemplo de aplicação para cada caso, temos:

1. Qual a soma dos doze primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada, em que $a_1 = 8$ e $a_2 = 10$?

   Sendo $n = 12$, então:

   $$S_{12} = a_{12+2} - a_2 = a_{14} - 10 = 3482 - 10 = 3472$$

   Portanto, a soma dos doze primeiros termos é 3472.

2. Qual a soma dos doze primeiros termos da sucessão de Fibonacci original?

   Sendo $n = 12$, então:

$$S_{12} = a_{12+2} - 1 = a_{14} - 1 = 377 - 1 = 376$$

   Portanto, a soma dos doze primeiros termos é 376.

A segunda propriedade refere-se à soma dos quadrados dos n primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada.

Seja $\boldsymbol{S_n^I}$ a soma dos quadrados dos n primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada.

A soma dos quadrados dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada, é dada por:

$$\boldsymbol{S_n^I = a_n a_{n+1} - a_1(a_2 - a_1)}$$

Demonstração:

Para $k > 1$ tem-se que:

$$\begin{aligned}(a_k)^2 &= a_k(a_k)\\ &= a_k(a_{k+1} - a_{k-1})\\ &= a_k a_{k+1} - a_k a_{k-1}\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S_n^I} &= (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + (a_4)^2 + \cdots + (a_{n-1})^2 + (a_n)^2\\ &= (a_1)^2 + (a_2a_3 - a_1a_2) + (a_3a_4 - a_3a_2) + (a_4a_5 - a_4a_3) + \cdots + (a_na_{n+1} - a_na_{n-1})\\ &= (a_1)^2 - a_1a_2 + a_na_{n+1}\\ &= a_na_{n+1} - a_1(a_2 - a_1)\end{aligned}$$

c.q.d

No caso da sucessão de Fibonacci original, uma vez que $a_1 = a_2 = 1$, será:

$\boldsymbol{S_n^I} = a_n a_{n+1}$

Fazendo um exemplo de aplicação para cada caso, temos:

1. Qual a soma dos quadrados dos sete primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada, em que $a_1 = 10$ e $a_2 = 13$?

Sendo $n = 7$, então:

$$\begin{aligned} S_7^I &= a_7 a_8 - a_1(a_2 - a_1) \\ &= 154 \times 249 - 10 \times (13 - 10) \\ &= 38346 - 10 \times 3 \\ &= 38316 \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos quadrados dos sete primeiros termos é 38316.

2. Qual a soma dos quadrados dos sete primeiros termos da sucessão de Fibonacci original?

   Sendo $n = 7$, então:

   $$S_7^I = a_7 a_8 = 13 \times 21 = 273$$

   Portanto, a soma dos quadrados dos sete primeiros 273.

2.5 Truques matemáticos usando a sucessão de Fibonacci

2.5.1 Mais rápido que a calculadora

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico entrega a um voluntário uma calculadora e pede-lhe que escreva dois números naturais, um por baixo do outro. Por baixo do segundo número deve escrever a soma dos dois números anteriores e assim sucessivamente até obter uma coluna vertical com dez números.

Enquanto estes números são registados, o mágico encontra-se de costas, virando-se quando a coluna estiver completa.

A partir daqui, apresentam-se três propostas de truques que poderão ser realizados:

Proposta 1:

O mágico propõe ao voluntário o seguinte desafio, em que ganhará o mais rápido e no qual o mágico não usará calculadora: ambos irão calcular a soma dos dez números, dividir o resultado por 11 e finalmente adicionar 150.

Então o mágico escreve o resultado das operações … muito antes que o voluntário termine!

EXPLICAÇÃO:

O mágico obtém o resultado adicionando 150 à sétima parcela, sendo fácil efetuar este cálculo mentalmente.

Sejam x e y os dois números escolhidos.

Cálculos efetuados pelo voluntário		
x y $x+y$ $x+2y$ $2x+3y$ $3x+5y$ $\mathbf{5x+8y}$ $8x+13y$ $13x+21y$ $21x+34y$ ------------- $55x+88y$	$(55x+88y)\div 11=\mathbf{5x+8y}$ (= sétima parcela)	$(5x+8y)+150=5x+8y+150$ (= sétima parcela $+150$)

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escolhe inicialmente os números 3 e 7. Então a coluna com os dez números será:

$$\begin{array}{r} 3\\ 7\\ 10\\ 17\\ 27\\ 44\\ 71\\ 115\\ 186\\ 301 \end{array}$$

De seguida o voluntário irá adicionar as dez parcelas, dividir o resultado por 11 e adicionar-lhe 150, obtendo 221, o que levará algum tempo. Por sua vez, o mágico apenas fará, mentalmente, o cálculo $71 + 150 = 221$.

Proposta 2

O mágico desafia o voluntário a determinar a soma dos oito primeiros números mais rapidamente que ele, que não tem calculadora. Pouco tempo depois o mágico escreve o resultado pretendido, ganhando o desafio.

(Se o mágico tiver um bom cálculo mental, pode pedir ao voluntário que adicione os dez números escritos. Ou então o mágico utiliza papel e lápis para efetuar os cálculos).

EXPLICAÇÃO:

O resultado da adição dos oito primeiros números obtém-se subtraindo o segundo número ao décimo, sendo fácil efetuar este cálculo mentalmente.

(Para obter a soma dos dez números escritos, o mágico calcula mentalmente, ou com papel e lápis, os dois números que se seguiriam na coluna e subtrai o segundo ao décimo segundo.)

Este truque baseia-se na primeira propriedade da sucessão de Fibonacci, apresentada no ponto 2.4., onde se refere que a soma S_n , $n > 1$, dos n primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada é dada por:

$$S_n = a_{n+2} - a_2$$

EXEMPLO:

Considerando a coluna com os dez números do exemplo correspondente à proposta 1, o voluntário irá adicionar as oito primeiras parcelas obtendo o número 294. Por sua vez, o mágico apenas fará o cálculo correspondente a $301 - 7 = 294$.

(No caso de se ter optado pela soma dos dez números, o voluntário obteria o número 781, e o mágico teria de determinar os dois termos seguintes que neste caso seriam 487 e 788, e efetuar o cálculo $788 - 7 = 781$).

Proposta 3

O mágico diz ao voluntário que escreva, numa outra coluna, os quadrados dos números que escreveu inicialmente, sem que o mágico veja. Depois disso, o mágico desafia o voluntário a determinar a soma dos quadrados dos números mais rapidamente que ele, que não tem calculadora. Após alguns cálculos com papel e lápis, o mágico escreve o resultado pretendido, ganhando o desafio.

EXPLICAÇÃO:

Para obter o resultado, o mágico apenas observa a primeira coluna e, em relação aos números aí escritos, efetua os seguintes cálculos: multiplica o primeiro número pela diferença entre o segundo e o primeiro; multiplica o décimo número pelo que apareceria a seguir se se continuasse a sequência; finalmente, a este último resultado subtrai o que obteve anteriormente, ganhando assim o desafio. Este truque baseia-se na segunda propriedade da sucessão de Fibonacci apresentada no ponto 2.4, onde se refere que a soma dos quadrados dos n primeiros termos da sucessão de Fibonacci generalizada, é dada por:

$$S_n^I = a_n a_{n+1} - a_1(a_2 - a_1)$$

EXEMPLO:

Considerando novamente os dez números correspondentes à coluna da proposta 1, os respetivos quadrados são:

$$9$$

$$49$$

$$100$$

$$189$$

$$729$$

$$1936$$

$$5041$$

$$13225$$

$$34596$$

$$90601$$

De seguida o voluntário irá adicionar estes dez números, obtendo o resultado 146575.

Por sua vez, o mágico fará o cálculo seguinte:

$$301 \times 487 - 3 \times (7 - 3) = 146575$$

2.5.2 Divisão telepática

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico pede a um voluntário que escreva dois números naturais, à sua escolha, um por baixo do outro. Por baixo do segundo número deve escrever a soma dos dois números anteriores e assim sucessivamente até obter uma coluna vertical com dez números. (Se necessário, o mágico disponibiliza uma calculadora para facilitar os cálculos.)

Enquanto estes números são registados, o mágico encontra-se de costas. Depois de registados os dez números, e continuando de costas, o mágico pede ao voluntário que divida o décimo número pelo nono e escreva o resultado arredondado a duas casas decimais. Depois, num forte exercício de telepatia, o mágico irá adivinhar o resultado, dizendo em voz alta o número 1,62.

EXPLICAÇÃO:

O resultado dá sempre 1,62 quaisquer que sejam os dois números iniciais. Este truque baseia-se no facto de, na sucessão de Fibonacci, dividindo o n-ésimo termo pelo anterior se obter um valor aproximado do número de ouro, sendo esta aproximação tanto maior quanto maior for o valor de n.

No caso deste truque, pode-se efetuar a divisão a partir do oitavo termo.

O número de ouro (ou número áureo) aparece na fórmula do termo geral da sucessão de Fibonacci e corresponde a $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398875$.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escolhe inicialmente os números 3 e 7. Então a coluna com os dez números será:

$$\begin{array}{c} 3 \\ 7 \\ 10 \\ 17 \\ 27 \\ 44 \\ 71 \\ 115 \\ 186 \\ 301 \end{array}$$

Então o voluntário fará, na calculadora, a conta seguinte: $301 \div 186 \approx 1{,}62$ e é este o resultado que o mágico adivinha.

Capítulo 3

MUDANÇAS DE BASE

3.1 INTRODUÇÃO

O sistema de numeração mais utilizado pelo homem é o sistema decimal (ou sistema de numeração na base 10). Neste sistema utiliza-se dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Cada algarismo tem um valor posicional, isto é, o seu valor depende da posição que ocupa no número onde aparece escrito.

O sistema binário é o sistema mais utilizado por máquinas, uma vez que os sistemas digitais trabalham internamente com dois estados (ligado/desligado, verdadeiro/falso, aberto/fechado). No sistema binário (ou sistema de numeração na base 2) utiliza-se dois algarismos: 0 e 1.

No mundo da computação, para além do sistema binário (base 2), são também utilizados outros sistemas de numeração, como é o caso dos sistemas ternário (base 3), octal (base 8) e hexadecimal (base 16).

A quantidade de algarismos disponíveis num sistema de numeração designa-se por base. Assim, na base 3 utiliza-se três algarismos (0, 1 e 2), na base 4 utiliza-se quatro algarismos (0, 1, 2 e 3), etc. Uma vez que existem apenas 10 algarismos diferentes, a partir da base 10 recorre-se também a letras para representar números nessas bases. Assim, por exemplo, o sistema de numeração hexadecimal (base 16) utiliza os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 do sistema decimal e as letras A, B, C, D, E e F, com as seguintes equivalências: A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 e F = 15.

É sempre possível converter números inteiros de uma base para outra, sendo esta conversão baseada em determinadas regras.

Assim, por exemplo, para converter um número escrito na base 10 para a base 2, podemos proceder do modo seguinte:

1) Efetuar divisões sucessivas por 2 até obter um quociente inferior a 2;
2) Escrever ordenadamente o último quociente e todos os restos obtidos por ordem inversa.

Vejamos o exemplo do número 52, em que fazemos divisões sucessivas por 2 até obtermos um quociente inferior a 2, (neste caso igual a 1), altura em que o algoritmo termina.

52	2				
(0)	26	2			
	(0)	13	2		
		(1)	6	2	
			(0)	3	2
				(1)	(1)

Escrevendo da direita para a esquerda os 0´s e 1´s da tabela, que representam o último quociente e os restos das divisões, vamos obter a representação do número 52 no sistema de numeração de base 2:

$$(52)_{10} = (110100)_2$$

Para converter um número escrito na base 2 para a base 10, procede-se do modo seguinte:

1) Multiplica-se cada algarismo do número pela potência de base 2 e expoente correspondente à sua ordem;
2) Adiciona-se os produtos obtidos.

Voltando ao exemplo anterior, vejamos como converter para a base 10 o número $(110100)_2$:

$$\begin{aligned}(110100)_2 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 2^5 + 2^4 + 2^2 = 32 + 16 + 4 \\ &= (52)_{10}\end{aligned}$$

A tabela seguinte apresenta os números inteiros de 0 até 63 escritos no sistema binário. Cada número decimal tem à sua direita o correspondente número binário. Os seis números escritos na parte de cima da tabela são as potências de 2 utilizadas na escrita dos números em notação binária.

Números decimais	Números binários					
	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0						0
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
7				1	1	1
8			1	0	0	0
9			1	0	0	1
10			1	0	1	0
11			1	0	1	1
12			1	1	0	0
13			1	1	0	1
14			1	1	1	0
15			1	1	1	1
16		1	0	0	0	0
17		1	0	0	0	1
18		1	0	0	1	0
19		1	0	0	1	1
20		1	0	1	0	0
21		1	0	1	0	1
22		1	0	1	1	0
23		1	0	1	1	1
24		1	1	0	0	0
25		1	1	0	0	1
26		1	1	0	1	0
27		1	1	0	1	1
28		1	1	1	0	0
29		1	1	1	0	1
30		1	1	1	1	0
31		1	1	1	1	1

Números decimais	Números binários					
	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0
43	1	0	1	0	1	1
44	1	0	1	1	0	0
45	1	0	1	1	0	1
46	1	0	1	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1
48	1	1	0	0	0	0
49	1	1	0	0	0	1
50	1	1	0	0	1	0
51	1	1	0	0	1	1
52	1	1	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
54	1	1	0	1	1	0
55	1	1	0	1	1	1
56	1	1	1	0	0	0
57	1	1	1	0	0	1
58	1	1	1	0	1	0
59	1	1	1	0	1	1
60	1	1	1	1	0	0
61	1	1	1	1	0	1
62	1	1	1	1	1	0
63	1	1	1	1	1	1

Daqui se retira que, por exemplo:

$$43 = (101011)_2 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 32 + 8 + 2 + 1$$

3.2 TRUQUES MATEMÁTICOS USANDO MUDANÇAS DE BASE

3.2.1 À PROCURA DO NÚMERO

Este truque tem por base a referência bibliográfica [3]

PROCEDIMENTO:

O mágico pede a um voluntário que pense num número com dois algarismos.

De seguida o mágico realiza os seguintes passos:

1- Pergunta ao voluntário se o número em que pensou é par ou ímpar.

   Depois de ouvir a resposta procede da seguinte forma: se o número for par pede ao voluntário que divida o número por 2, se for ímpar, pede-lhe que subtraia 1 e que divida o resultado por 2.

2- Pergunta depois ao voluntário se o resultado obtido é par ou ímpar.

3- O procedimento mantém-se com cada novo resultado. Isto é, o mágico pergunta se o número resultante é par ou ímpar e, ouvida a resposta, pede ao voluntário para repetir o procedimento descrito no item 1.

   Os cálculos terminam quando o resultado for igual a 1.

O mágico vai fazendo anotações enquanto o voluntário lhe vai dando as informações solicitadas e, quando é informado de que o resultado é igual a 1, revela imediatamente ao voluntário o número em que ele pensou.

EXPLICAÇÃO E EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário pensou no número 52. Durante as etapas do truque, ele efetuará os cálculos da coluna do lado esquerdo da tabela seguinte, enquanto o mágico fará as suas anotações de acordo com a coluna do lado direito.

Voluntário	Mágico
52	1
26	2
13	4 (x)
6	8
3	16 (x)
1	32 (x)

Podemos verificar que a coluna do voluntário se inicia com o número pensado, 52, e que termina com o número 1.

A coluna do mágico começa em 1 e duplica o valor a cada novo resultado revelado pelo voluntário.

Para cada número ímpar referido pelo voluntário, o mágico faz uma marcação (x) para o número obtido na sua coluna.

Se somarmos os números marcados pelo mágico com (x), vamos obter o número que foi pensado pelo voluntário.

$$4 + 16 + 32 = 52$$

A base deste truque está no método das divisões sucessivas por 2 que é usado para representar um número inteiro positivo no sistema binário, isto é, como soma de potências distintas de 2, a partir da sua representação no sistema decimal. Quando a divisão por 2 resulta num número ímpar, o mágico pede ao voluntário que subtraia 1 antes de efetuar a divisão seguinte uma vez que este corresponderia ao resto dessa divisão.

3.2.2 OS CALENDÁRIOS MÁGICOS DA CIRCULAÇÃO

Este truque tem por base a referência bibliográfica [3]

PROCEDIMENTO:

Neste truque o mágico exibe sequencialmente cinco calendários, que, supostamente, foram elaborados quando os presidentes de cinco Câmaras Municipais decidiram limitar a circulação de automóveis no centro das respetivas cidades, minorando assim os efeitos da poluição.

Cada calendário apresenta algumas datas destacadas. Essas datas destacadas, diz o mágico, foram propostas como datas em que não era permitido circular de automóvel no centro da respetiva cidade. Esses calendários permitem-lhe adivinhar a data de aniversário de qualquer voluntário.

Assim, pede a um voluntário que teste esta sua capacidade. Então, sequencialmente, vai-lhe mostrando cada calendário e vai perguntando se o dia do seu aniversário aparece destacado ou não.

Os calendários exibidos, com os dias destacados, são os seguintes:

calendário 1

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	**3**	4	**5**
6	**7**	8	**9**	10	**11**	12
13	14	**15**	16	**17**	18	**19**
20	**21**	22	**23**	24	**25**	26
27	28	**29**	30	**31**		

calendário 2

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	**2**	**3**	4	5
6	**7**	8	9	**10**	**11**	12
13	**14**	**15**	16	17	**18**	**19**
20	21	**22**	**23**	24	25	**26**
27	28	29	**30**	**31**		

calendário 3

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	**4**	**5**
6	**7**	8	9	10	11	**12**
13	**14**	**15**	16	17	18	19
20	**21**	**22**	**23**	24	25	26
27	**28**	**29**	**30**	**31**		

calendário 4

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	16	17	18	19
20	21	22	23	**24**	**25**	**26**
27	**28**	**29**	**30**	**31**		

calendário 5

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
27	**28**	**29**	**30**	**31**		

Figura 2 - Folhas do truque dos calendários (fonte: Sampaio e Malagutti "Mágicas, Matemática e outros mistérios")

Após exibir os cinco calendários e ter ouvido as cinco respostas do voluntário, o mágico pergunta-lhe qual é o seu signo do zodíaco. Após ouvir a resposta, o mágico pega numa revista (ou num jornal) que levou consigo e lê o horóscopo do voluntário, acrescentando que lhe deseja um feliz aniversário no dia e mês que revela nesse momento.

EXPLICAÇÃO:

Se o voluntário disser que o dia do seu aniversário está destacado no calendário 1, o mágico deve memorizar o primeiro número destacado nesse calendário (número 1). Se não estiver, deve passar ao calendário seguinte. Em relação a este, o procedimento repete-se: se o dia do aniversário do voluntário estiver destacado no calendário 2, o mágico deve adicionar o primeiro número destacado nesse calendário (número 2) ao que memorizou anteriormente. Se não estiver, o mágico passa ao calendário seguinte.

Este procedimento repete-se até ao último calendário: sempre que o dia estiver destacado num calendário, o mágico adiciona o primeiro número aí destacado à soma que obteve anteriormente.

O resultado da soma que o mágico foi fazendo mentalmente será o número correspondente ao dia de aniversário do voluntário. Perguntando ao voluntário qual o seu signo do zodíaco, ficará a saber o seu mês de nascimento.

EXEMPLO:

Suponhamos que o voluntário nasceu no dia 14 de abril. O mágico vai adicionando mentalmente o primeiro número destacado que aparece em cada calendário que tem o dia 14 destacado. Neste caso, isso verifica-se nos calendários 2, 3 e 4. Os primeiros números destacados nestes calendários são 2, 4 e 8. O mágico faz mentalmente a soma 2 + 4 + 8 obtendo 14.

Os primeiros dias destacados, nos cinco calendários, são as cinco primeiras potências de 2: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ e $2^4 = 16$. Cada número inteiro positivo pode ser escrito como uma potência de 2 ou como uma soma de potências de 2, distintas entre si, como já se exemplificou na secção 3.1. O primeiro calendário mostra destacados (no sistema decimal) apenas os números que, no sistema binário, apresentam o algarismo 1 na última coluna da tabela da página 19. O segundo calendário mostra destacados apenas os números que, no sistema binário, apresentam o algarismo 1 na penúltima coluna da referida tabela, sendo o processo análogo para os restantes calendários.

Assim, por exemplo, o único número destacado a aparecer nos calendários 1, 4 e 5 será 1 + 8 + 16 = 25.

3.2.3 ADIVINHAR O NÚMERO PENSADO

Este truque tem por base a referência sitográfica [F]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e pede-lhe que pense num número natural compreendido entre 1 e 80, inclusive, sem o revelar. Depois, realçando as suas capacidades telepáticas, diz-lhe que é capaz de descobrir esse número. Para isso, o mágico mostra sequencialmente os cartões seguintes e vai pedindo ao voluntário que refira apenas se o número em que pensou está representado no cartão e, caso esteja, se está destacado. No final, magicamente, o mágico revela o referido número.

Cartão 1

1	**2**	4	**5**	7	**8**	10	**11**	13
14	16	**17**	19	**20**	22	**23**	25	**26**
28	**29**	31	**32**	34	**35**	37	**38**	40
41	43	**44**	46	**47**	49	**50**	52	**53**
55	**56**	58	**59**	61	**62**	64	**65**	67
68	70	**71**	73	**74**	76	**77**	79	**80**

Cartão 2

3	4	5	**6**	**7**	**8**	12	13	14
15	**16**	**17**	21	22	23	**24**	**25**	**26**
30	31	32	**33**	**34**	**35**	39	40	41
42	**43**	**44**	48	49	50	**51**	**52**	**53**
57	58	59	**60**	**61**	**62**	66	67	68
69	**70**	**71**	75	76	77	**78**	**79**	**80**

Cartão 3

9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**
63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**

Cartão 4

27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**
63	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**
72	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**

EXPLICAÇÃO:

Este truque envolve a escrita de números na base 3.

Para descobrir o número pensado, o mágico procede do modo seguinte:

1- se o voluntário disser que o número em que pensou não aparece no cartão, o mágico passa ao cartão seguinte;

2- se o voluntário disser que o número em que pensou aparece no cartão mas não está destacado, o mágico adiciona o número que aparece no canto superior esquerdo desse cartão à soma que vier de trás (caso haja);

3- se o voluntário disser que o número em que pensou aparece no cartão e está destacado, o mágico adiciona o dobro do número que aparece no canto superior esquerdo desse cartão à soma que vier de trás (caso haja).

De notar que cada cartão começa por uma potência de 3 ($3^0 = 1$; $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$) e que cada um inclui também os números cuja decomposição em soma de potências de três contém a que está situada no seu canto superior esquerdo, simples ou multiplicada por 2. Os números que aparecem destacados são aqueles cuja decomposição contém essa potência multiplicada por 2. É por este motivo que o mágico tem de multiplicar por 2 o número que aparece no canto superior esquerdo do cartão a que diz respeito.

O conjunto dos quatro cartões constitui assim uma "máquina" de conversão de um número no sistema decimal para a base 3.

EXEMPLO:

Se o voluntário pensar no número 48, dirá que esse número não aparece no cartão 1, aparece no cartão 2 e não está destacado, aparece no cartão 3 e está destacado, e aparece no cartão 4 e não está destacado.

Os cálculos que o mágico fará são: $3 + 2 \times 9 + 27 = 48$.

3.2.4 A PEÇA DO DOMINÓ

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário, apresenta-lhe as peças todas de um dominó e, colocando-se de costas, pede-lhe que escolha uma. De seguida pede-lhe que escolha um dos lados da peça e que siga as indicações que lhe vai dar:

(1) Multiplica por 6 o número de pintas que existem no lado que escolheste.
(2) Ao resultado obtido adiciona o número total de pintas que existem na peça.
(3) Diz o resultado obtido.

Sabendo o resultado, o mágico adivinha qual foi a peça escolhida pelo voluntário.

EXPLICAÇÃO:

Este truque está relacionado com a escrita de números na base 7.

Consideremos uma peça genérica do dominó, cujos números de pintas são a e b, e que o voluntário escolhe o lado a. Com a indicação (1) o voluntário irá obter o número $6a$ e com a indicação (2) irá obter o número $6a + a + b$, isto é, $7a + b$, sendo este o resultado que vai revelar ao mágico.

Então o mágico divide por 7 o resultado revelado e os números obtidos no quociente e no resto são, exatamente, os números das pintas correspondentes à peça que o voluntário escolheu:

$$\begin{array}{r|l} 7a+b & 7 \\ \cline{2-2} b & a \end{array}$$

O número obtido no quociente é o número de pintas do lado da peça que o voluntário escolheu e o número correspondente ao resto é o número de pintas do outro lado da peça.

Salienta-se que a e b são números inteiros compreendidos entre 0 e 6, inclusive. Isto, não só porque são números de pintas das peças do dominó, mas também porque, como o valor máximo que a expressão $7a + b$ pode tomar é 42, então o quociente da divisão por 7 é no máximo 6, e, atendendo ao algoritmo da divisão, o resto é também no máximo 6.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escolhe a peça com os números de pintas 3 e 4, e escolhe o lado com 4 pintas. Então, seguindo as indicações do mágico, irá efetuar os cálculos seguintes: $4 \times 6 + 7 = 31$, sendo este o resultado que revela ao mágico. Este irá então dividir 31 por 7:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 4 \end{array}$$

Então o mágico dirá que o voluntário escolheu a peça que tinha 3 e 4 pintas, e que o lado que escolheu foi o que tinha 4 pintas.

3.2.5 A CARTA ESCONDIDA

PROCEDIMENTO:

Para a realização deste truque são necessários: um ajudante que conheça todo o procedimento e as cartas numeradas de 2 a 9, dos quatro naipes de um baralho de cartas.

O mágico coloca-se de costas (ou sai da sala) e quem orienta o truque é o ajudante. Assim, o ajudante escolhe um voluntário, dá-lhe as cartas referidas no início e pede-lhe que escolha cinco. O ajudante pega então nas cinco cartas e devolve ao voluntário a carta com o número maior e com naipe repetido, pedindo-lhe que esconda essa carta, pois é essa que o mágico terá de adivinhar.

Depois disto, o ajudante irá colocar na mesa as quatro cartas com que ficou, de forma estratégica, de modo a passar a informação necessária para que o mágico adivinhe qual foi a carta escondida. Então, nesse momento, o mágico vira-se (ou entra na sala), vê as cartas e, usando as suas capacidades mágicas, identifica a carta escondida.

EXPLICAÇÃO:

O principal conteúdo matemático que está na base deste truque é a escrita de números na base 2.

Nas cinco cartas que o voluntário escolhe há pelo menos duas do mesmo naipe, uma vez que existem apenas quatro naipes. Então o ajudante devolve ao voluntário a carta que tiver o número maior de entre as que tiverem o mesmo naipe (este critério mantém-se no caso de haver dois naipes repetidos).

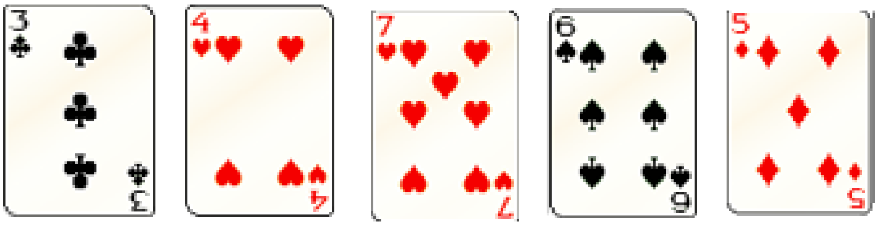
Quando o ajudante colocar as restantes cartas na mesa, irá proceder do modo seguinte: a carta que tem o mesmo naipe da que está escondida fica numa posição previamente acordada com o mágico (por exemplo, na última posição da sequência). Assim, olhando para a sequência, o mágico fica a saber qual é o naipe da carta escondida.

Depois disto, o ajudante recorre às restantes 3 cartas para "informar" o mágico sobre o número n de pontos que terá de adicionar ao número da carta que indica o naipe para que este obtenha o número da carta escondida. (A carta que indica o naipe tem, necessariamente, um número inferior ao da carta escondida, uma vez que foi este o critério utilizado para a retirar).

Assim, o ajudante terá de converter o número n para o sistema binário, sendo o número zero representado por uma carta virada ao contrário e o número um representado por uma carta com o naipe visível. Com este critério e com as três cartas, é possível representar todos os números inteiros de zero a sete, sendo estes suficientes, uma vez que $n \leq 7$. Então, com esta informação, o mágico converte este número n novamente para o sistema decimal e adiciona-o ao número da carta que está na última posição, identificando assim a carta que está escondida.

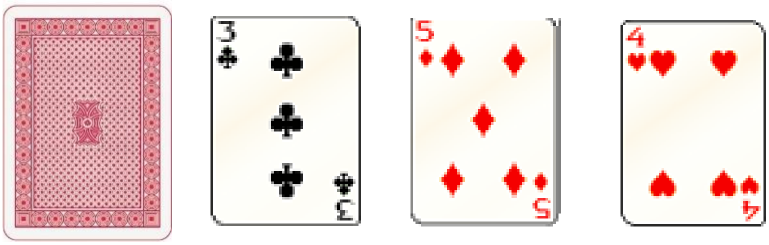
EXEMPLO:

Suponhamos que o voluntário escolhe as cartas seguintes:



Então o ajudante devolve ao voluntário o sete de copas, por ser a carta repetida com maior número. Logo, o quatro de copas é a carta-chave que irá informar o mágico sobre o naipe da carta escondida. Além disso, é necessário que o ajudante informe o mágico que este tem de adicionar 3 unidades ao número da carta-chave para obter o número da carta escondida ($7 - 4 = 3$).

Supondo que o ajudante tinha combinado com o mágico que a carta que indicava o naipe ficaria na última posição da sequência, e como o número 3 é $(011)_2$, a sequência em que o ajudante iria colocar as cartas seria a seguinte:



Capítulo 4
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

4.1 INTRODUÇÃO

Uma progressão aritmética é uma sucessão numérica em que cada termo a partir do segundo é igual à soma do termo anterior com uma constante r. Ao número r chama-se razão da progressão aritmética.

Uma progressão aritmética é uma sucessão numérica (a_n), $n \in \mathbb{N}$, definida por recorrência da forma seguinte:

$$a_n = a_{n-1} + r, \qquad n > 1$$

onde o primeiro termo, a_1, é um número dado. Note-se que:

$$r = a_n - a_{n-1}, \qquad n > 1.$$

Alguns exemplos de progressões aritméticas:

- (1, 4, 7, 10, 13, …) é uma progressão aritmética em que o primeiro termo a_1 é igual a 1 e a razão r é igual a 3.
- (-2, -4, -6, -8, -10, …) é uma progressão aritmética em que o primeiro termo a_1 é igual a -2 e a razão r é igual a -2.

4.2 ALGUMAS PROPRIEDADES DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

4.2.1 O n-ésimo termo de uma progressão aritmética com primeiro termo a_1 e razão r, denotado por a_n, obtém-se através da expressão do termo geral

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r \ , \qquad n \in IN.}$$

A expressão do termo geral pode ser demonstrada por indução matemática:

Esta expressão é válida para $n = 1$, uma vez que:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + (1-1) \times r \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Assumindo como hipótese de indução que a expressão é válida para $n - 1$, com $n \geq 2$, ou seja, que $a_{n-1} = a_1 + (n-2) \times r$, resulta que o n-ésimo termo é dado por:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + r \\
&= a_1 + (n-2) \times r + r \\
&= a_1 + (n-2+1) \times r \\
&= a_1 + (n-1) \times r
\end{aligned}
$$

Como consequência direta da expressão do termo geral, vemos que o $\boldsymbol{n}$-ésimo termo de uma progressão aritmética pode ser obtido como função do $\boldsymbol{m}$-ésimo termo por:

$$\boldsymbol{a_n = a_m + (n-m) \times r}$$

Com efeito:

$$
\begin{aligned}
a_m + (n-m) \times \mathrm{r} &= a_1 + (m-1) \times r + (n - \mathrm{m}) \times r \\
&= a_1 + (m-1+n-m) \times r \\
&= a_1 + (n-1) \times r \\
&= a_n
\end{aligned}
$$

Além disso, **também é consequência direta da expressão do termo geral que:**

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1}$$

Ou seja, a partir do segundo termo, o termo central é a média aritmética do termo antecessor e do sucessor. De facto:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2) \times r + a_1 + n \times r}{2} = \frac{2(a_1 + (n-1) \times r)}{2} = a_n$$

4.2.2 Soma dos termos de uma progressão aritmética:

A soma dos termos de uma progressão aritmética **situados no intervalo fechado de $\boldsymbol{a_p}$ até $\boldsymbol{a_q}$, $\boldsymbol{q > p}$,** é calculada pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{S_{(p,q)} = \frac{(q-p+1) \times \left(a_p + a_q\right)}{2}}$$

No caso particular da soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos, em que $p = 1$ e $q = n$, pode-se utilizar a seguinte simplificação da expressão anterior:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2}}$$

Demonstração:

Considerando a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_{3,} \dots, a_{n-1}, a_n)$, a soma S_n de todos os termos desta progressão pode ser escrita das seguintes formas:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$$

Todos os pares dentro de parênteses têm o mesmo valor, isto é, $a_1 + a_n$, por serem equidistantes em relação aos extremos da progressão aritmética. Por exemplo:

$$(a_2 + a_{n-1}) = (a_1 + r + a_n - r) = (a_1 + a_n)$$

$$(a_3 + a_{n-2}) = (a_1 + 2r + a_n - 2r) = (a_1 + a_n)$$

Portanto,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Então, como há n pares de termos, vem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \times n$$

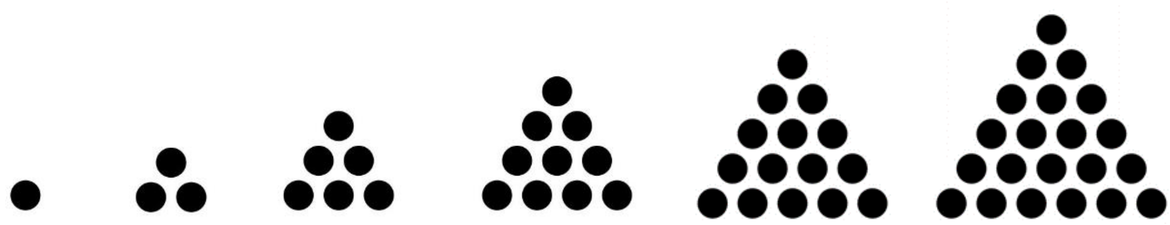
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

c.q.d.

4.3 NÚMEROS TRIANGULARES

Na sequência seguinte podemos verificar que cada termo corresponde à soma de todos os números naturais até à respetiva ordem. Por exemplo, o termo de ordem 4 (T_4) corresponde ao número 10, pois 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

Também podemos verificar que cada termo se obtém do anterior adicionando-lhe o número correspondente à sua ordem, isto é, $T_4 = T_3 + 4$, por exemplo.



$T_1 = 1$ $T_2 = 4$ $T_3 = 9$ $T_4 = 16$ $T_5 = 25$ $T_6 = 21$

A sucessão gerada desta forma chama-se **sucessão dos números triangulares**.

Atendendo à expressão verificada em 4.2.2 a partir da qual se obtém a soma dos n termos de uma progressão aritmética, podemos deduzir o termo geral da sucessão dos números triangulares:

$$T_1 = 1$$
$$T_2 = 1 + 2 = 3$$
$$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$\ldots$$
$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = (1 + n)\frac{n}{2}, \qquad n \in IN$$

Assim, **o termo geral da sucessão dos números triangulares é dado por:**

$$\boldsymbol{T_n = (1 + n)\frac{n}{2}}, \qquad \boldsymbol{n \in IN}$$

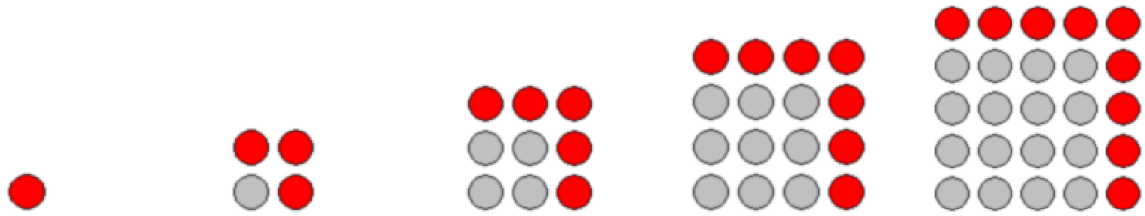
O **termo geral** pode também ser **definido por recorrência**, tal como vimos anteriormente, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{T_n = T_{n-1} + n}, \text{ se } n \geq 2 \text{ e } T_1 = 1.$$

4.4 NÚMEROS QUADRADOS

Na sequência seguinte podemos verificar que cada termo corresponde à soma dos primeiros números ímpares até à respetiva ordem. Por exemplo, o termo de ordem 4 (T_4) corresponde ao número 16, pois a soma dos 4 primeiros números ímpares é 16 (1 + 2 + 3 + 5 = 16).

Trata-se da sequência dos quadrados perfeitos.



$T_1 = 1$ $\quad$ $T_2 = 4$ $\quad$ $T_3 = 9$ $\quad$ $T_4 = 16$ $\quad$ $T_5 = 25$

O termo geral desta sequência pode ser deduzido da forma seguinte:

$$T_1 = 1 = 1^2$$
$$T_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$T_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$T_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$\dots$$
$$T_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = (1 + 2n - 1)\frac{n}{2} = n^2 \,, \qquad n \in IN$$

Assim, **o termo geral da sucessão dos números quadrados é dado por:**

$$\boldsymbol{T_n = n^2} \,, \qquad \boldsymbol{n \in IN}$$

Podemos também concluir que **a soma dos n primeiros números ímpares é n^2**.

4.5 Truques matemáticos usando progressões aritméticas

4.5.1 Adivinhar três datas consecutivas

Este truque tem por base a referência bibliográfica [3]

PROCEDIMENTO:

Neste truque, o mágico mostra a um voluntário uma folha de um calendário, de um mês qualquer, e pede-lhe para escolher, em segredo, um dia da semana, de segunda a domingo. Depois pede-lhe para escolher três datas consecutivas desse dia da semana e adicionar os três números, revelando apenas o resultado final.

Imediatamente o mágico revela os dias escolhidos.

EXPLICAÇÃO:

Este truque está fundamentado no facto de os três números escolhidos formarem uma progressão aritmética de razão 7, isto é, têm a forma

$$d-7, d, d+7$$

Assim sendo, a soma desses três termos é $3d$. Basta então dividir a soma revelada por 3 para obter o segundo dia escolhido. Subtraindo 7, tem-se o primeiro dia, somando 7 tem-se o terceiro.

(Este truque também pode ser feito com quatro datas consecutivas de um mesmo dia da semana, isto é, quatro segundas-feiras, quatro terças-feiras, etc.)

EXEMPLO:

Suponhamos que o voluntário escolheu as três primeiras quintas-feiras, como se mostra na figura seguinte:

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Figura 3 - Folha do truque das três datas consecutivas (fonte: Sampaio e Malagutti "Mágicas, Matemática e outros mistérios")

Então, fazendo a soma, ele dirá que obteve 30. Por sua vez, o mágico fará rapidamente os cálculos: $30 \div 3 = 10$; $10 - 7 = 3$; $10 + 7 = 17$ e dirá que o voluntário escolheu os números $3, 10$ e 17.

4.5.2 ADIVINHAR A SOMA DE CINCO DATAS ESCOLHIDAS

Este truque tem por base a referência bibliográfica [3]

PROCEDIMENTO:

O mágico leva consigo a folha de um calendário de um mês de cinco semanas, como por exemplo o da figura seguinte:

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Figura 4 - Folha de calendário para o truque das cinco datas escolhidas (baseada em: Sampaio e Malagutti “Mágicas, Matemática e outros mistérios”)

(Para este truque não devem ser usadas folhas de calendário que apresentem dias sobrepostos na mesma quadrícula).

O mágico pede a um voluntário para escolher cinco datas, uma de cada semana do mês. O voluntário poderá marcá-las no calendário, sem que o mágico veja, ou anotá-las num papel. O mágico pede-lhe então para dizer apenas quantos domingos escolheu, quantas segundas, quantas terças, e assim por diante. O mágico deverá ter um bloco de papel à mão para anotar.

Depois de o voluntário acabar de revelar os dados pedidos, o mágico pede-lhe que calcule a soma das datas escolhidas, sem a revelar. Então a magia acontece e o mágico adivinha a soma dos dias escolhidos.

EXPLICAÇÃO E EXEMPLO:

Suponhamos que o voluntário escolheu os dias destacados na figura seguinte:

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	**2**	3	4
5	6	7	8	9	10	**11**
12	13	14	15	**16**	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	**29**	30		

Figura 5 - Folha de calendário para o truque das cinco datas escolhidas

Ao ser interrogado, ele dirá que escolheu um domingo, uma quarta-feira, duas quintas-feiras e um sábado.

O mágico verifica então que a data central da folha do calendário é 15 (3ª quarta-feira) e calcula: 5 x 15 = 75. Depois disso, e atendendo às informações que o voluntário lhe deu sobre os dias da semana, procede do modo seguinte:

- para cada domingo, o mágico subtrai 3

- para cada segunda-feira subtrai 2

- para cada terça-feira subtrai 1

(as quartas-feiras são ignoradas)

- para cada quinta-feira adiciona 1

- para cada sexta-feira adiciona 2

- e para cada sábado adiciona 3.

No exemplo apresentado, o mágico fará a seguinte sequência de cálculos:

5 x 15 + 1 + 3 + 1 – 3 = 77, sendo este o resultado que revela.

A soma dos números que o voluntário escolheu é:

2 + 11 + 16 + 19 + 29 = 77, ou seja, (1+**1**) + (8+**3**) + (15+**1**) + (22-**3**) + (29+**0**) = 77.

O primeiro número de cada uma das cinco parcelas anteriores corresponde às cinco quartas-feiras do calendário, que ficam posicionados na coluna central. Os números a negrito localizam o número escolhido pelo voluntário relativamente ao número central. Por exemplo, a parcela (15+**1**) refere-se ao número **16** do calendário pois este situa-se uma “casa” à direita do número central que é o 15. A parcela (22-**3**) refere-se ao número **19** do calendário pois este situa-se 3 “casas” à esquerda do número central que é o 22.

Assim, 1+8+15+22+29 é a soma de cinco termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 7, cujo valor se pode obter fazendo 15 x 5 = 75, uma vez que 15 é o valor central. Então:

(1+**1**) + (8+**3**) + (15+**1**) + (22-**3**) + (29+**0**) = (1+8+15+22+29) + (**1**+**3**+**1**-**3**)

= 15 x 5 + 1 + 3 + 1 – 3, sendo esta a sequência de cálculos efetuada pelo mágico.

Nota: no caso de a folha do calendário apresentar apenas quatro datas à quarta-feira, o truque mantém-se válido. Basta imaginar a folha preenchida como se se tratasse de uma progressão aritmética de razão 1, de acordo com o exemplo seguinte:

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
-3	-2	-1	0	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Figura 6 - Folha de calendário para o truque das cinco datas escolhidas

A quarta-feira central desta folha do calendário corresponde então ao número 14.

4.5.3 VENCER A CALCULADORA

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário, dá-lhe uma calculadora, pede-lhe que escolha um número de dois algarismos e que o revele. Então o mágico propõe-lhe o seguinte desafio: ambos irão adicionar todos os números naturais até chegar ao número escolhido, incluindo-o, e multiplicar o resultado por dois. O voluntário usará calculadora mas o mágico apenas poderá usar papel e lápis. Ganha o primeiro a revelar o resultado certo.

Obviamente, ganhará o mágico.

EXPLICAÇÃO:

Neste truque, o que se pede é o dobro da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, a dos números naturais, sendo n o número escolhido pelo voluntário.

Vimos no início deste capítulo que podemos obter a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética através da expressão seguinte:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2}}$$

Neste caso, como $a_1 = 1$ e $a_n = n$, em que n é o número escolhido pelo voluntário, podemos ainda simplificar esta expressão, obtendo assim a expressão correspondente ao termo geral da sucessão dos números triangulares:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n \times (1 + n)}{2}}$$

Como neste truque se pretende o dobro da soma de todos os números naturais até ao escolhido, incluindo-o, basta que o mágico multiplique rapidamente o número escolhido pelo seu sucessor.

E é certo que ganhará o desafio.

EXEMPLO:

Suponhamos que o voluntário escolheu o número 17. Então ele terá de calcular $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17) = 306$.

Por sua vez, o mágico apenas fará: $17 \times 18 = 306$, sendo muito mais rápido.

4.5.4 A SOMA DOS ÍMPARES

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário, dá-lhe uma calculadora, pede-lhe que escolha um número ímpar de dois algarismos e que o revele. Então o mágico propõe-lhe o seguinte desafio: ambos irão adicionar todos os números ímpares até chegar ao número escolhido, incluindo-o. O voluntário usará calculadora mas o mágico apenas poderá usar papel e lápis. Ganha o primeiro a revelar o resultado certo.

Obviamente, ganhará o mágico.

EXPLICAÇÃO:

Neste truque, pede-se a soma dos n primeiros números ímpares e vimos em 4.4 que podemos obter esta soma através do valor da expressão n^2. Ora, o número ímpar que o voluntário escolheu tem a forma $2n-1$, com $n \in IN$. Para descobrir o valor de n (que será o número de parcelas que o voluntário vai adicionar), basta que o voluntário adicione uma unidade ao número escolhido pelo voluntário e divida esta soma por dois, uma vez que $\frac{2n-1+1}{2} = n$. Depois, basta calcular o quadrado do número obtido e ganhar o desafio.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escolheu o número 23. Então a soma que terá de calcular é: $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23 = 144$.

Por sua vez, o mágico apenas fará os cálculos seguintes: $\frac{23+1}{2} = 12$ e $12^2 = 144$.

4.5.5 UM CONTRA DOIS

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe dois voluntários, dá-lhes uma calculadora e pede-lhes que cada um deles escolha um número de dois algarismos e que os revelem. (Se os números forem iguais, ou muito próximos, o mágico pede a um deles que altere o seu número de modo que haja, no mínimo, dez unidades a separá-los.) Então o mágico propõe-lhes o seguinte desafio: irão os três adicionar todos os números naturais compreendidos entre os dois números escolhidos, incluindo-os, e multiplicar o resultado por dois. Os voluntários usarão calculadora mas o mágico apenas poderá usar papel e lápis. Ganha o primeiro a revelar o resultado certo.

Obviamente, ganhará o mágico.

EXPLICAÇÃO:

Neste truque, pretende-se calcular o dobro da soma dos termos de uma progressão aritmética situados entre dois deles, incluindo-os.

Para isso podemos recorrer à expressão seguinte e que foi introduzida no início deste capítulo:

$$\boldsymbol{S_{(p,q)}} = \frac{(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} + \mathbf{1}) \times (\boldsymbol{a_p} + \boldsymbol{a_q})}{\mathbf{2}}$$

Neste truque, como se trata da sequência de números naturais (que é uma progressão aritmética de razão 1 e cujo primeiro termo também é 1), verifica-se que:

$q = a_q =$ maior dos números escolhidos e

$p = a_p =$ menor dos números escolhidos.

Assim, a expressão anterior pode simplificar-se da seguinte forma:

$$\boldsymbol{S_{(p,q)}} = \frac{(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} + \mathbf{1}) \times (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p})}{\mathbf{2}}$$

Como neste truque se pretende o dobro da soma de todos os números naturais compreendidos entre os dois números escolhidos, incluindo-os, basta que o mágico multiplique a soma deles pela sua diferença adicionada de 1. E ganhará o desafio.

EXEMPLO:

Vamos supor que um dos voluntários escolhe o número 31 e o outro escolhe o número 77. Então a conta que o mágico fará é: $108 \times 47 = 5076$, uma vez que $31 + 77 = 108$ e $77 - 31 + 1 = 47$. Claro que estes cálculos são muito mais rápidos do que calcular o dobro da soma de todos os números naturais compreendidos entre 31 e 77, incluindo-os.

Capítulo 5

NÚMEROS MÚLTIPLOS DE NOVE

5.1 INTRODUÇÃO

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Existem muitos truques matemáticos que envolvem os critérios de divisibilidade. Estes critérios não são mais do que regras práticas que nos permitem verificar se um número é divisível por outro sem ser necessário efetuar a divisão.

Vejamos alguns dos critérios de divisibilidade mais utilizados:

- Um número é **divisível por 2** se e só se é par, isto é, termina em 0, 2, 4, 6, ou 8.
- Um número é **divisível por 3** se e só se a soma dos seus algarismos é divisível por 3.
- Um número é **divisível por 4** se e só se o número formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4.
  (Também podemos dizer que um número é divisível por 4 se a sua metade for par.)
- Um número é **divisível por 5** se e só se termina em 0 ou em 5.
- Um número é **divisível por 6** se e só se é divisível por 2 e por 3.
- Um número é **divisível por 9** se e só se a soma dos seus algarismos é divisível por 9.
- Um número é **divisível por 10** (**100**, **1000**) se e só se termina em 0 (00, 000).
- Um número é **divisível por 11** se e só se subtraindo e somando alternadamente os seus algarismos da direita para a esquerda se obtém um múltiplo de 11.

Todos os critérios podem ser obtidos utilizando a seguinte definição de congruência modular:

“Dois números inteiros a e b são congruentes, módulo d, se e só se a diferença for um múltiplo de d.”

Verificação:

Comecemos por verificar que **se** dois números inteiros a e b são congruentes, módulo d, isto é, $a \equiv b\ (mod\ d)$, **então** a diferença é um múltiplo de d.

Ora, $a \equiv b\ (mod\ d)$ significa que $a = d \times q_a + r$ e $b = d \times q_b + r$, sendo q_a, q_b e r números inteiros e $r < d$.

A diferença $a - b$ é então:

$$\begin{aligned} a - b &= d \times q_a + r - (d \times q_b + r) \\ &= d \times (q_a - q_b) + r - r \\ &= d \times (q_a - q_b). \end{aligned}$$

Como a diferença de números inteiros é um número inteiro, podemos concluir que $d \times (q_a - q_b)$ é múltiplo de d, ou seja, $a - b$ é múltiplo de d.

Verifiquemos agora que **se** a diferença entre dois números inteiros a e b é um múltiplo de d, **então** a e b são congruentes, módulo d.

Ora, $a - b$ é múltiplo de d se for possível escrever $a - b = d \times k$, sendo k um número inteiro.

Ao dividirmos a e b por d temos duas divisões inteiras e podemos então escrever as igualdades fundamentais destas duas divisões:

$a = d \times q_a + r_a$ e $b = d \times q_b + r_b$, sendo q_a, q_b, r_a e r_b números inteiros e $0 \leq r_a < d$ e $0 \leq r_b < d$.

Substituindo então a e b pelas expressões anteriores, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} a - b = d \times k &\Leftrightarrow (d \times q_a + r_a) - (\ d \times q_b + r_b) = d \times k \\ &\Leftrightarrow d \times q_a + r_a - d \times q_b - r_b = d \times k \\ &\Leftrightarrow d \times (q_a - q_b) + r_a - r_b = d \times k. \end{aligned}$$

Suponhamos que $r_a \geq r_b$ (se for o contrário, o raciocínio é análogo):

Da expressão $d \times (q_a - q_b) + r_a - r_b = d \times k$ cocluimos que $r_a - r_b$ é um múltiplo de d, por ser a diferença entre dois múltiplos de d. Como $0 \leq r_a < d$ e $0 \leq r_b < d$, vem que $0 \leq r_a - r_b < d$. Uma vez que o único múltiplo de d que pertence ao conjunto $\{0,1,2, \dots, d\}$ é o zero, então $r_a - r_b = 0$, ou seja, $r_a = r_b$. E se os restos são iguais, significa que $a \equiv b\ (mod\ d)$.

Neste capítulo, grande parte dos truques apresentados estão relacionados com o critério de divisibilidade por 9. Assim, vejamos a sua dedução:

DEDUÇÃO DO CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 9

Comecemos por verificar que a soma de dois números múltiplos de 9 é sempre um número múltiplo de 9:

Sejam a e b dois números múltiplos de 9.

Então $a = 9\,n$ e $b = 9\,m$, com $n, m \in IN_0$.

Ora, $a + b = 9n + 9m = 9\,(n + m)$. Como a e b são números inteiros, a sua soma, $a + b$, também é um número inteiro (Z é fechado para a adição). Portanto $9\,(n + m)$ é um múltiplo de 9.

Vejamos agora a dedução do critério de divisibilidade por 9:

Seja N um número natural. Consideremos a representação de N em notação expandida, isto é:

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$

Verifiquemos que cada potência de 10 é um múltiplo de 9 somado de uma unidade, ou seja, $10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1, 1000 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1$, etc.

Então podemos representar N da forma seguinte:

$$N = a_n \times (9 \times \underbrace{11 \ldots 1}_{\text{n uns}} + 1) + \cdots + a_2 \times (9 \times 11 + 1) + a_1 \times (9 + 1) + a_0$$

$$= 9 \times (11 \ldots 1 \times a_n) + a_n + \cdots + 9 \times (11 \times a_2) + a_2 + 9 \times a_1 + a_0$$

$$= (9 \times (11 \ldots 1 \times a_n) + \cdots + 9 \times (11 \times a_2) + 9 \times a_1) + (a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$$

Podemos verificar que nesta última expressão todas as parcelas dentro do primeiro parêntesis são múltiplas de 9. Como vimos anteriormente, a soma de dois números múltiplos de 9 é sempre um número múltiplo de 9. Então podemos concluir que:

$$N = 9 \times k + (a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0), \quad k \in IN_0$$

Logo, pela definição verificada acima, o número N será múltiplo de 9 se e só se a expressão dentro do parênteses, $a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$, for um múltiplo de 9.

Vimos então que uma forma rápida de verificar se um número é múltiplo de nove (ou divisível por nove) é adicionar os seus algarismos; se a soma for divisível por nove, o número também é.

Exemplo: 3729 será múltiplo de 9?

Adicionando os seus algarismos obtemos: 3+7+2+9=21

Como 21 não é múltiplo de 9, o número 3729 também não é.

Se a soma resultar num número com mais de um algarismo, também podemos adicionar esses algarismos até obter um único. Se este for nove, então o número inicial é múltiplo de nove. Neste exemplo, 2+1=3, logo o número inicial não é múltiplo de 9.

Ao número 3 obtido anteriormente chama-se a raiz digital do número 3729 e representa o resto da divisão inteira de 3729 por 9. Este valor também se pode obter calculando os “noves fora” do número 3729, que consiste em somar os algarismos e, ao mesmo tempo, subtrair 9 sempre que a soma seja superior ou igual a 9. Assim, para calcular os “noves fora” do número 3729 podemos utilizar a seguinte sequência:

“3+7=10, noves fora 1, 1+2=3, 3+9=12, noves fora 3”.

Este processo permite determinar rapidamente o resto da divisão inteira de um número por 9. Vejamos porquê:

O número 3729, que é o mesmo que $3 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 9$, pode decompor-se da seguinte forma:

$$3 \times (10^3 - 1) + 7 \times (10^2 - 1) + 2 \times (10^1 - 1) + 3 + 7 + 2 + 9,$$

pois, no sistema decimal, a divisão inteira de $10^k - 1,\ k \geq 0$, por 9 tem resto zero.

Como $3 \times 999 + 7 \times 99 + 2 \times 9$ é múltiplo de 9, então o resto da divisão de 3729 por 9 é o mesmo que resta da divisão de $3 + 7 + 2 + 9$ por 9, que se pode obter subtraindo a esta soma o maior múltiplo de 9 nela contido. Assim,

$3 + 7 + 2 + 9 = 21$; o maior múltiplo de 9 contido em 21 é 18; 21-18 = 3; então o resto é 3.

5.2 TRUQUES MATEMÁTICOS ENVOLVENDO MÚLTIPLOS DE NOVE

5.2.1 A SOMA MÁGICA

Este truque tem por base a referência bibliográfica [3]

PROCEDIMENTO:

O mágico pede a um voluntário que escreva um número de quatro algarismos. Então o mágico escreve um número mágico numa folha e coloca-a, dobrada, num local visível por todos.

De seguida pede a outro voluntário que escreva outro número de quatro algarismos, por baixo do primeiro. Depois disso, o mágico escreve o terceiro número, por baixo dos anteriores, mas de modo que, em cada coluna, o 2º e o 3º algarismos somem 9.

Repete-se o processo pedindo a outro voluntário que escreva outro número de quatro algarismos por baixo do terceiro e o mágico escreve o quinto número usando o critério que utilizou para escrever o terceiro.

Finalmente, o mágico pede a outro voluntário que determine o resultado da adição. Este resultado será, para surpresa de todos, o número mágico que o mágico escreveu na folha que nesse momento é mostrada ao público.

EXPLICAÇÃO:

O número mágico que o mágico escreve obtém-se do 1º número subtraindo-lhe duas unidades e acrescentando o algarismo 2 à esquerda do resultado obtido, ficando assim com um número de cinco algarismos.

Uma vez que a soma dos 2º e 3º números é 9999 e que a soma dos 4º e 5º números também é 9999, a soma das quatro últimas parcelas é 19 998, ou seja, é 2000 – 2. Então a soma total obtém-se adicionando este número à primeira parcela, o que se consegue facilmente usando o processo descrito no início desta explicação.

EXEMPLO:

Vamos supor que o primeiro voluntário escreve o número 1496. Então o número que o mágico escreve na folha que irá guardar é 21494.

Supondo que o segundo voluntário escreve o número 5288, o mágico escreverá o número 4711. E se o terceiro voluntário escrever, por exemplo, o número 7645, o mágico escreverá o número 2354. Então a soma que o último voluntário irá fazer é:

$$\begin{array}{r} 1496 \\ 5288 \\ 4711 \\ 7645 \\ +\ 2354 \\ \hline 21494 \end{array}$$

5.2.2 NÚMEROS E LETRAS

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

(Se for realizado com muitos participantes, este truque causa grande surpresa)

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e dá-lhe as seguintes indicações:

(1) Pensa num número natural e multiplica-o por 9.

(2) Adiciona os algarismos do resultado obtido anteriormente.

(3) Se obtiveste um número de dois algarismos, volta a adicioná-los até obteres um número com um único algarismo.

(4) Subtrai 5 ao número obtido.

(5) Associa o resultado obtido à letra que ocupa essa posição no abecedário e pensa no nome de um país europeu que comece por essa letra. A seguir, pensa no nome de um animal que comece pela segunda letra do país que escolheste.

Depois de o voluntário ter pensado no nome do país e do animal, o mágico diz. " Afinal … o que é que pensas fazer na **D**inamarca com uma **i**guana?"

EXPLICAÇÃO:

Multiplicar por nove o número em que se pensou, é obter um número necessariamente múltiplo de nove. Adicionar os algarismos até que o resultado tenha apenas um algarismo implica obter sempre o número nove.

Ao subtrair cinco obtém-se necessariamente o número quatro, pelo que a quarta letra do alfabeto é “d” e o único país europeu que começa por esta letra é “Dinamarca”. Como a letra seguinte é “i”, o nome do animal que surge mais rapidamente é “iguana”.

Nota: para que este truque não tenha margem de erro, no momento em que se pede para pensar no nome de um país e no nome de um animal, pode-se mostrar uma tabela com o nome de vários países (apenas um começado pela letra D que será Dinamarca) e outra com o nome de vários animais (apenas um começado pela letra i e que será iguana).

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário pensa no número 15. Então fará os cálculos seguintes: 15 x 9 = 135; 1 + 3 + 5 = 9; 9 – 5 = 4. A quarta letra do alfabeto será então a letra “d”.

5.2.3 ADIVINHAR A SOMA

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e, sem ver, dá-lhe as seguintes indicações:

(1) Escreve um número de três algarismos diferentes.

(2) Escreve o número que obténs invertendo a ordem dos algarismos do número anterior.

(3) Subtrai o menor ao maior dos números anteriores.

(4) Em relação ao resultado obtido, escolhe se me vais dizer o algarismo das unidades ou o das centenas e identifica-o.

Após esta informação, o mágico revela o resultado da operação realizada no passo (3).

EXPLICAÇÃO:

Seja $\boldsymbol{abc}$ o número que o voluntário escolhe. Este número pode ser escrito na forma $\mathbf{100}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{10}\,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ (I). Quando se inverte a ordem dos algarismos, o número que se obtém pode ser escrito na forma $\mathbf{100}\,\boldsymbol{c}+\mathbf{10}\,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (II). De seguida subtrai-se o menor ao maior.

Suponhamos que o maior é (I). Então temos:

$$\mathbf{100}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{10}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - (\mathbf{100}\,\boldsymbol{c} + \mathbf{10}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = \mathbf{100}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{10}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \mathbf{100}\,\boldsymbol{c} - \mathbf{10}\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$
$$= \mathbf{99}\,\boldsymbol{a} - \mathbf{99}\,\boldsymbol{c}$$
$$= \mathbf{99}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})$$

Assim, podemos verificar que, independentemente do número escolhido pelo voluntário, o resultado obtido é um múltiplo de nove.

(Se o número maior fosse (II), o processo seria semelhante e a conclusão seria a mesma.)

Como o algarismo das dezenas é necessariamente 9, basta então que o voluntário identifique o algarismo das unidades ou o das centenas para que o mágico calcule quanto falta para 9 e revele o resultado da operação efetuada.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escreve o número 237. Seguindo as indicações dadas pelo mágico, no passo (3) fará a conta $732 - 237 = 495$. Se no passo (4) optar por identificar o algarismo das unidades, que é 5, então o voluntário fica a saber que o algarismo das centenas é $9 - 5 = 4$, logo o resultado da operação efetuada pelo voluntário no passo (3) só poderá ser 495.

5.2.4 A FIGURA ESCOLHIDA

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

(Este truque pode ser feito com muitos participantes em simultâneo. Neste caso, o mágico projeta a tabela e a figura para que todos possam ver).

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e diz-lhe que, com os seus poderes especiais, irá surpreendê-lo. Para isso deve seguir as instruções seguintes:

(1) Pensa num número de 10 a 99, inclusive.
(2) Adiciona os seus algarismos.
(3) Subtrai esta soma ao número em que pensaste e memoriza o resultado.

Neste momento o mágico mostra a tabela seguinte e pede ao voluntário que memorize a figura situada junto do resultado obtido no ponto (3).

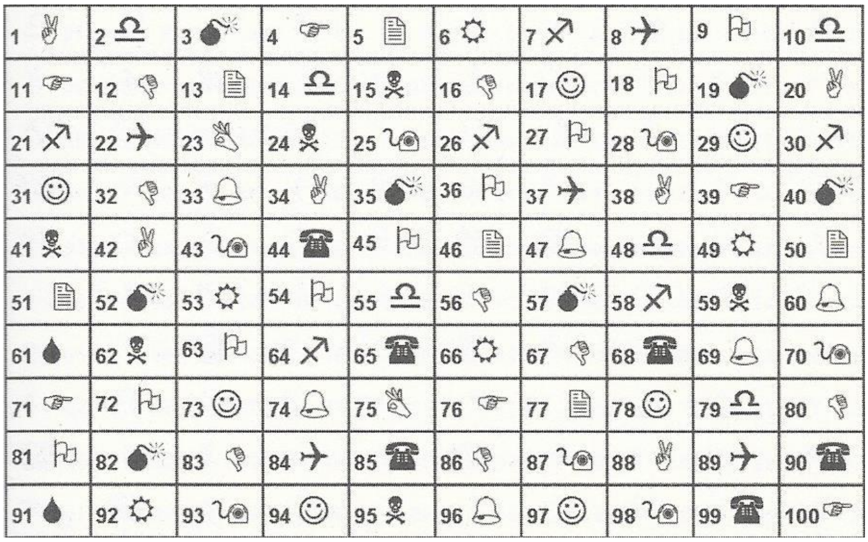
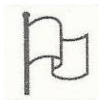


Figura 7 - Tabela para a realização do truque da figura escolhida (fonte: Miquel Capó Dolz "Magia matemática")

Agora, num enorme esforço de telepatia, o mágico adivinha a figura memorizada e mostra-a:



EXPLICAÇÃO:

Este truque baseia-se no facto de obtermos sempre um múltiplo de nove quando a um número natural subtraímos a soma dos seus algarismos.

Neste truque, seja ab o número que o voluntário escolhe. Este número pode ser escrito na forma $10\,a + b$. Quando se subtrai a este número a soma dos seus algarismos, obtém-se: $10a + b - (a + b) = 10a + b - a - b = 9a$. Este resultado é então um número múltiplo de nove. Por isso, para que o truque resulte, basta que a figura que aparece junto de todos os números que são múltiplos de nove seja a mesma.

O truque tem ainda mais efeito se for repetido utilizando uma tabela diferente da primeira.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário pensa no número 78. Seguindo as indicações dadas pelo mágico, o voluntário fará os cálculos: $7 + 8 = 15$ e $78 - 15 = 63$. Este resultado está efetivamente associado à figura indicada acima.

5.2.5 À DESCOBERTA DO ALGARISMO

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário, dá-lhe uma calculadora e pede-lhe que siga as instruções seguintes:

(1) Escreve um número de três algarismos e multiplica-o por um número de 1 a 9, à tua escolha.
(2) Multiplica o resultado anterior por 3.
(3) Multiplica novamente o resultado anterior por um número de 1 a 9, à tua escolha.
(4) Multiplica o resultado anterior por 6.
(5) Finalmente multiplica o resultado obtido por um número de 1 a 9, à tua escolha.

De seguida o mágico pede ao voluntário que altere a ordem dos algarismos que fazem parte do resultado e que os revele, à exceção de um que seja diferente de zero, pois ele próprio irá adivinhar esse algarismo. Então, depois de um esforço telepático, o mágico revela o algarismo secreto.

EXPLICAÇÃO:

Neste truque, as operações que conduzem ao objetivo são aquelas em que o voluntário multiplica por 3 e por 6, que é o mesmo que multiplicar por 18. Obtém-se assim um número múltiplo de nove de forma "camuflada". As operações realizadas com o número que o voluntário escolhe não têm influência no resultado pretendido.

Assim, sabemos que o resultado que o voluntário obtém é um número múltiplo de nove, logo, a soma dos seus algarismos também é um múltiplo de nove. Então, quando o voluntário revela os algarismos, para descobrir o que falta basta que o mágico adicione os algarismos revelados e determine o que falta para que a soma de todos chegue ao primeiro múltiplo de nove.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escreve inicialmente o número 855 e decide multiplicá-lo por 6, obtendo o número 5130. No passo (2) irá multiplicar este resultado por 3 obtendo 15390. Se no passo (3) decidir multiplicar o resultado anterior por 7, por exemplo, obtém o número 107730. No passo (4), ao multiplicar este resultado por 6 obtém o número 646380 e, se no passo (5) optar por multiplicar este número por 2, o resultado final será: 1292760.

Suponhamos agora que o voluntário decide omitir o algarismo 6 e que diz os restantes por esta ordem: $7,2,2,0,9,1$. Então o mágico fará os cálculos seguintes: $7+2+2+0+9+1=21$; como o primeiro múltiplo de 9 imediatamente a seguir a 21 é 24, então o mágico fará $24-21=3$ e $9-3=6$, sendo este o algarismo omitido pelo voluntário.

5.2.6 A SOMA PREVISTA

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e pede-lhe que siga as instruções seguintes, ficando o voluntário de costas:

(1) Escreve a tua data de nascimento na forma $ddmmaaaa$.

(2) Altera a ordem dos oito algarismos e escreve o número que obténs.

(3) Subtrai o menor dos dois números ao maior.

(4) Adiciona os algarismos do resultado obtido. Se obtiveres um número de dois algarismos, volta a adicioná-los até obteres um único algarismo.

Depois de um esforço teatral, o mágico descobre o resultado obtido.

(Em alternativa, o mágico podia ter escrito previamente o resultado numa folha que poderia estar escondida e que neste momento seria revelada.)

EXPLICAÇÃO:

Subtraindo dois números com os mesmos algarismos escritos em sequências diferentes, obtemos sempre um número que é múltiplo de nove. Vejamos porquê:

Seja a o número correspondente à data de nascimento do voluntário e seja b qualquer um dos números que se obtêm permutando os seus algarismos. Assim:

$a = a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \equiv r \ (mod\ 9)$

$b = P\ (a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7) \equiv r\ (mod\ 9)$

Então, $se\ a > b,\ \ a - b \equiv r - r\ (mod\ 9)$, isto é, $a - b \equiv 0\ (mod\ 9)$.

(Se $b > a$, o processo seria semelhante e a conclusão seria a mesma.)

Assim, o número que se obtém com o passo (3) é múltiplo de nove.

Vimos anteriormente que a soma dos algarismos de um número que é múltiplo de nove também é um múltiplo de nove. Por isso, as adições sucessivas do resultado só podem terminar no número 9, sendo este o número revelado pelo mágico (ou escrito na folha).

EXEMPLO:

Vamos supor que a data de nascimento do voluntário, escrita na forma pedida, é 21091998. Realizando os passos (2) e (3), o voluntário fará o cálculo seguinte: $89091912 - 21091998 = 67999914$. No passo (4) fará: $6 + 7 + 9 + 9 + 9 + 9 + 1 + 4 = 54$ e $5 + 4 = 9$.

Capítulo 6

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

6.1 INTRODUÇÃO

Para esta introdução foi consultada a referência sitográfica [L].

A álgebra é o ramo da Matemática que estuda a manipulação formal de equações, operações matemáticas, polinómios e estruturas algébricas. É um dos principais ramos da matemática pura, juntamente com outros como a geometria, a topologia, a análise, e a teoria dos números.

As origens da álgebra encontram-se na antiga Babilónia. No século XVIII a.C. foram encontrados, em placas de argila da Babilónia e em papiros egípcios, problemas numéricos relativos a áreas, volumes, partilhas de riqueza, ou ao cálculo de pesos e de comprimentos. Os matemáticos desta época desenvolveram um sistema aritmético avançado, com o qual puderam fazer cálculos algébricos, sendo capazes de aplicar fórmulas e calcular soluções para incógnitas num conjunto de problemas que, hoje, seriam resolvidos como equações lineares e equações quadráticas.

Por outro lado, a maioria dos matemáticos egípcios, indianos, gregos e chineses do primeiro milénio a.C. resolviam estas equações geralmente por métodos geométricos, como foi descrito, por exemplo no *Papiro de Rhind* (1650 a.C.) e na obra *Elementos*, de Euclides (300 A.C.). Os estudos geométricos dos gregos, consolidados nos *Elementos*, deram a base para a generalização de fórmulas.

O nome "álgebra" surgiu de um tratado intitulado *Al-gjabr Wa'l-mocábala*, escrito por Mohammed ben Musa, (um matemático nascido por volta de 900 d.C) com o objetivo de ensinar a encontrar soluções para os problemas matemáticos quotidianos de então; a palavra *Al-jabr* deu origem à palavra “álgebra”.

No século XVI d.C., um grande progresso em álgebra foi designar os números por letras (variáveis), o que permitiu trabalhar com expressões com variáveis e escrever fórmulas, cujas letras podem ser substituídas por números quaisquer.

Na álgebra elementar, que faz parte do currículo do ensino básico e secundário, utilizam-se expressões com variáveis que são manipuladas usando as regras das operações aplicáveis a números e podem ser usadas, por exemplo, na resolução de equações.

A álgebra moderna ou superior desenvolveu-se a partir da álgebra elementar, especialmente a partir de 1830, com os trabalhos de Evariste Galois sobre grupos. Os seus principais objetos de estudo são os grupos, os anéis, os corpos e os espaços vetoriais, sendo estes estruturas algébricas dotadas de uma ou várias operações que cumprem determinadas propriedades.

6.2 Truques envolvendo expressões algébricas

6.2.1 A conta secreta

Este truque tem por base a referência bibliográfica [5]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário, dá-lhe uma folha de papel e uma caneta, e, sem que o mágico veja, pede-lhe que escreva os quatro números seguintes:

(1) O ano do seu nascimento.
(2) O ano correspondente a algum acontecimento importante da sua vida.
(3) A idade que terá em 31 de dezembro.
(4) O número de anos que irão passar desde o tal acontecimento importante até 31 de dezembro.

De seguida o mágico diz ao voluntário que adicione os quatro números.

(Em simultâneo, o mágico escreve também numa folha as referidas datas, fingindo que as recebe telepaticamente e sem que ninguém as veja. Pode escrever qualquer número que lhe ocorra, pois a única coisa que interessa é que escreva no final o número que será igual ao resultado do voluntário: o dobro do ano corrente.)

Terminadas as operações, o mágico deve dizer ao voluntário que não quer que as restantes pessoas conheçam a sua idade e sugere-lhe que risque os quatro números iniciais, deixando apenas o resultado final. O mágico faz o mesmo na sua folha e finalmente ambos mostram a respetiva folha, verificando-se que o número obtido é, magicamente, o mesmo.

EXPLICAÇÃO:

Sejam:

x - o ano de nascimento,

y - o ano do acontecimento importante,

z - o ano atual.

A idade do voluntário será então $z - x$ e o número de anos que passaram desde o tal acontecimento é $z - y$.

Assim, a adição sucessiva indicada pelo voluntário corresponde a:

$x + y + (z - x) + (z - y) = 2z$ (dobro do ano atual).

Observação: Se o mágico quiser repetir o truque, pode pedir a outro voluntário que adicione outro número que seja do seu conhecimento (por exemplo o dia do mês) para além dos referidos e assim obtém um resultado diferente, bastando que o mágico adicione também esse número ao dobro do ano atual.

EXEMPLO:

Vamos supor que, seguindo os passos indicados pelo mágico, o voluntário escreve:

(1) 1987

(2) 2005

(3) 28

(4) 10

No passo (5) o voluntário fará: $1987 + 2005 + 28 + 10 = 4030$, que é efetivamente o dobro de 2015 (ano atual).

6.2.2 AS FACES DOS TRÊS DADOS

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e dá-lhe uma calculadora e três dados normais, com as faces numeradas de 1 a 6. Diz-lhe que se vai virar de costas e que ele irá lançar os dados e seguir as indicações que lhe dará. No final, o mágico irá adivinhar os números das faces que ficam voltadas para cima.

Depois de lançar os três dados, o mágico dá as seguintes indicações:

(1) Multiplica o valor do primeiro dado por 2 e adiciona 5.

(2) Multiplica o resultado obtido por 5 e adiciona o valor do segundo dado.

(3) Multiplica o resultado obtido por 10 e adiciona o valor do terceiro dado.

(4) Diz o resultado que obtiveste.

Depois desta informação, o mágico identifica rapidamente os números das faces que ficam voltadas para cima, nos três dados.

EXPLICAÇÃO:

Sejam:

x - o número da face voltada para cima do primeiro dado,

y - o número da face voltada para cima do segundo dado,

z - o número da face voltada para cima do terceiro dado.

Seguindo as indicações do mágico, temos:

(1) $2x + 5$

(2) $(2x + 5) \times 5 + y = 10x + 25 + y$

(3) $(10x + 25 + y) \times 10 + z = 100x + 250 + 10y + z$.

Subtraindo 250 ao último resultado (divulgado pelo voluntário), obtém-se $100x + 10y + z$, que corresponde ao número xyz, ou seja, o número cujos algarismos correspondem ao número das faces voltadas para cima dos três dados.

EXEMPLO:

Vamos supor que no primeiro dado saiu o número 5, no segundo saiu o número 1 e no terceiro saiu o número 2. Então, seguindo os passos indicados pelo mágico, o voluntário fará os cálculos seguintes:

(1) $5 \times 2 + 5 = 15$

(2) $15 \times 5 + 1 = 76$

(3) $76 \times 10 + 2 = 762$

Então o resultado que o voluntário divulga é 762. Sabendo isto, o mágico fará $762 - 250 = 512$, descobrindo assim os números das faces dos dados (5,1 e 2).

6.2.3 MULTIPLICAR COM OS DADOS

Este truque tem por base a referência bibliográfica [5]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e dá-lhe dois dados normais, uma folha e uma caneta. De seguida o mágico coloca-se de costas, pede ao voluntário que lance os dados e que vá fazendo os cálculos seguintes:

(1) Multiplica os números que aparecem nas faces superiores dos dados;
(2) Multiplica os números que aparecem nas faces inferiores dos dados;
(3) Multiplica o número da face superior do primeiro dado com o da face inferior do segundo dado;
(4) Multiplica o número da face inferior do primeiro dado com o da face superior do segundo dado;
(5) Adiciona os quatro resultados obtidos nas etapas anteriores.

Após a adição, o mágico, sempre de costas, adivinha o resultado obtido: 49.

EXPLICAÇÃO:

Os dados normais têm a particularidade de a soma das faces opostas ser sempre 7.

Assim, sejam:

x - o número da face voltada para cima do primeiro dado;

y - o número da face voltada para cima do segundo dado.

Então, os números das respetivas faces voltadas para baixo são dadas por $7 - x$ e $7 - y$.

As expressões correspondentes às indicações do mágico são então:

(1) xy
(2) $(7 - x)(7 - y)$
(3) $x(7 - y)$
(4) $y(7 - x)$
(5) $xy + (7 - x)(7 - y) + x(7 - y) + y(7 - x)$
$= xy + 49 - 7y - 7x + xy + 7x - xy + 7y - xy$
$= 49$

EXEMPLO:

Vamos supor que no primeiro dado saiu o número 4 e no segundo saiu o número 1. O produto destes números é 4.

Os números das faces opostas são, respetivamente, 3 e 6, pelo que o produto destes números é 18.

Nos passos (3) e (4) o voluntário calcula $4 \times 6 = 24$ e $3 \times 1 = 3$ e, no passo (5), calcula: $4 + 18 + 24 + 3 = 49$, sendo este o resultado que o mágico adivinha.

6.2.4 DESCOBRIR A CARTA

Este truque tem por base a referência bibliográfica [7]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e dá-lhe um baralho normal de 40 cartas. Explica que cada carta numerada vale o correspondente número de pontos e que cada às vale um ponto, cada dama vale oito pontos, cada valete vale nove pontos e cada rei vale dez pontos.

Depois o mágico coloca-se de costas e pede ao voluntário que retire aleatoriamente uma carta do baralho e dá-lhe as seguintes indicações:

(1) Multiplica por dois o valor da carta retirada;
(2) Adiciona dois ao resultado anterior;
(3) Multiplica por cinco o resultado anterior;
(4) Se a carta for de espadas, adiciona um ao resultado anterior; se for de copas, adiciona dois; se for de paus, adiciona três e se for de ouros, adiciona quatro.

Feitos os cálculos, o mágico pergunta qual o resultado obtido e, magicamente, descobre qual foi a carta retirada do baralho.

EXPLICAÇÃO:

Seja x o valor da carta que foi retirada pelo voluntário e y o naipe dessa carta.

As expressões correspondentes às indicações do mágico são então:

(1) $2x$;
(2) $2x + 2$;
(3) $5(2x + 2) = 10x + 10$;
(4) $10x + 10 + y$

Após ouvir o resultado, o mágico deverá subtrair-lhe 10. Assim obtém a expressão $10x + y$. Se esta expressão corresponder a um número de dois algarismos, então o algarismo das dezenas revela o valor (número) da carta e o das unidades identifica o naipe de acordo com a indicação (4). Se a expressão $10x + y$ corresponder a um número com três algarismos, então os dois primeiros algarismos revelam o valor (número) da carta e o último (o das unidades) identifica o naipe de acordo com a indicação (4).

EXEMPLO:

Vamos supor que saiu a dama de copas. Então o voluntário fará a seguinte sequência de cálculos: $8 \times 2 = 16$; $16 + 2 = 18$; $18 \times 5 = 90$; $90 + 2 = 92$ (uma vez que a carta era de copas). O resultado revelado pelo voluntário será então 92. Ouvindo isto, o mágico fará $92 - 10 = 82$, sendo que o número 8 revela que a carta é "dama" e o número 2 indica que o naipe é "copas", de acordo com as indicações iniciais.

Capítulo 7
MISCELÂNEA DE TRUQUES

7.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo contém truques que envolvem vários conceitos matemáticos, alguns já explorados em capítulos anteriores e outros que são abordados na respetiva explicação. No entanto, um dos truques tem por base a soma NIM, pelo que se torna necessário fazer uma abordagem a esta soma e a algumas das suas propriedades.

SOMA NIM

A soma NIM de dois números inteiros não negativos a e b representa-se por $a \oplus b$ e obtém-se representando-os primeiro na base 2 e depois adicionando os respetivos coeficientes módulo 2, o que significa que:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Por exemplo, consideremos os números 7 e 9. Vamos determinar a soma NIM de 7 com 9, isto é, $7 \oplus 9$:

Começamos então por representar os números 7 e 9 na base 2.

Assim, $7 = (111)_2$ e $9 = (1001)_2$. Então temos que:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ \oplus\, 1\,0\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,0 \end{array}$$

Como $(1110)_2 = 14$, então $7 \oplus 9 = 14$.

ALGUMAS PROPRIEDADES DA SOMA NIM

Sejam a, b e c números inteiros não negativos. Verificam-se então as seguintes propriedades:

1. Comutativa: $a \oplus b = b \oplus a$;
2. Associativa: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
3. Existência de elemento neutro (o número 0): $a \oplus 0 = a$;
4. Existência de oposto (é o próprio número): $a \oplus a = 0$.

Esta soma está relacionada com o clássico jogo do NIM, que consiste em escolher uma de entre várias pilhas de moedas (ou feijões, por exemplo), e retirar dessa pilha um número de moedas à escolha, podendo variar de uma até à pilha completa. Ganha o jogador que retirar a última moeda. (A estratégia que permite ganhar o jogo consiste em deixar o adversário em soma NIM nula).

7.2 MISCELÂNEA DE TRUQUES

7.2.1 CÁLCULO RÁPIDO DE RAÍZES CÚBICAS

Este truque tem por base a referência bibliográfica [5]

PROCEDIMENTO:

O mágico entrega uma calculadora a um voluntário e pede-lhe que pense num número qualquer entre 1 e 100, calcule o seu cubo e escreva o resultado numa folha.

Vendo o resultado, de imediato o mágico indica a raiz cúbica do número divulgado.

EXPLICAÇÃO E EXEMPLO:

Escrevendo os cubos dos números de 1 a 10, obtém-se:

Nº	Cubo
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

Analisando a tabela verifica-se que cada cubo termina num algarismo diferente e que este coincide com a própria raiz cúbica exceto no caso dos números 2, 3, 7 e 8. Nestes quatro casos o último algarismo do cubo pode obter-se através da diferença entre 10 e a raiz cúbica.

Assim, supondo que o resultado obtido é 79507, verifica-se que o último algarismo é 7, o que indica que o último algarismo da raiz cúbica é 3. Para descobrir o primeiro algarismo da raiz cúbica considera-se apenas o número que resta depois de se ignorar os três últimos algarismos do cubo e verifica-se entre que cubos se situa. O menor destes números é o primeiro algarismo da raiz cúbica.

De facto, $(ab)^3$ está compreendido entre $(a0)^3 = 1000a^3$ e $\left((a+1)0\right)^3 = 1000(a+1)^3$. Isto significa que o número obtido, removendo os três últimos algarismos de $(ab)^3$, está compreendido entre a^3 e $(a+1)^3$. Por esta razão podemos concluir que o primeiro algarismo da raiz cúbica é a.

No exemplo dado, ignorando os três últimos algarismos obtém-se 79 e verifica-se na tabela que este número se situa entre o cubo de 4 e o de 5. Como o menor destes números é o primeiro algarismo da raiz cúbica, concluímos que a raiz cúbica de 79507 é 43.

Para realizar este “truque” é necessário que o executante memorize os cubos dos números 1 a 10.

É também possível determinar rapidamente a raiz de ordem cinco, pois qualquer número e a sua potência de ordem cinco terminam no mesmo algarismo. Para descobrir o primeiro algarismo da raiz ignora-se os cinco últimos algarismos da potência e procede-se de modo análogo ao da raiz cúbica. Isto implica memorizar previamente (ou poder consultar) as potências de ordem cinco dos números de 1 a 10.

7.2.2 O RELÓGIO MÁGICO

PROCEDIMENTO:

O mágico apresenta a um voluntário o mostrador de um relógio desenhado numa folha e pede-lhe que escolha um dos doze números, sem o revelar. De seguida o mágico explica ao voluntário que irá bater aleatoriamente com o lápis (ou com o dedo, etc.) nos números do mostrador do relógio e que ele terá de contar o número de batidas, em silêncio, sendo que inicia a contagem no número que escolheu; (por exemplo, se escolheu o 11, na primeira batida deve contar “onze”, na segunda deve contar “doze” e assim sucessivamente); quando chegar a vinte deve mandar parar, dizendo “stop”. O número que o mágico revela é então o que corresponde à 20ª batida e será o número que o voluntário escolheu.

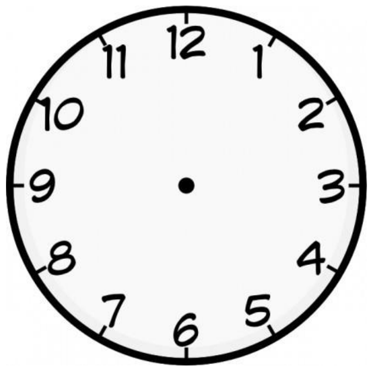


Figura 8 - Mostrador do relógio para a realização do truque do relógio mágico

EXPLICAÇÃO:

As primeiras oito batidas são aleatórias mas a nona tem de ser no número 12. A partir daí as batidas são seguidas e no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros do relógio).

Como o maior número que o voluntário pode escolher é 12, então haverá pelo menos nove batidas até que a sua contagem chegue a 20, pelo que a nona batida tem de ser no número 12. (É por este motivo que as oito primeiras são aleatórias). As batidas seguintes são feitas, sucessivamente, por ordem decrescente dos números que existem no mostrador e a vigésima contagem do voluntário irá ocorrer quando a batida coincidir com o número em que ele pensou.

De um modo geral, seja x o número de batidas após a nona e a o número em que o mágico pensou. Então o número onde o mágico está é $12 - x$ e a contagem do voluntário, em função de x, é $a + 8 + x$. Para que a contagem seja 20, terá de se verificar que $a + 8 + x = 20 \Leftrightarrow a = 12 - x$, logo o mágico irá parar no número em que o voluntário pensou.

Por exemplo: suponhamos que o voluntário escolhe o número 5. Na primeira batida o voluntário conta "5", na segunda conta "6", etc.. Entretanto o mágico vai batendo aleatoriamente nos números do mostrador e ao mesmo tempo vai contando, em silêncio, as batidas, começando em 1. Quando ocorrer a nona batida, o mágico tem de a fazer no número 12, sendo que o voluntário nesse momento conta "13". Faltam-lhe então 7 batidas para contar "20". Como $12 - 7 = 5$, o fim da contagem irá ocorrer no momento em que a batida acontece no número 5, uma vez que as batidas agora são feitas, sucessivamente, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escolhe o número 10. Então, à 11ª batida o voluntário dirá STOP. Por sua vez, o mágico efetuou oito batidas aleatoriamente, a 9ª batida ocorreu no número 12, a 10ª no número 11 e a 11ª no número 10, instante em que o voluntário diz STOP.

7.2.3 ESCOLHE E SOMA

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico apresenta a um voluntário a tabela numérica seguinte:

11	5	20	8	17
23	17	32	20	29
7	1	16	4	13
17	11	26	14	23
9	3	18	6	15

Depois, ficando de costas, pede-lhe que selecione cinco números, de linhas e colunas diferentes, e que os adicione, sem revelar o resultado.

Então, o mágico volta-se e, magicamente, revela o resultado obtido pelo voluntário.

EXPLICAÇÃO:

A tabela foi preenchida do modo seguinte: a primeira linha contém números aleatórios, mas as seguintes obtiveram-se adicionando uma constante (positiva ou negativa) aos números da primeira linha. Neste caso, sendo $a = 11,\ b = 5,\ c = 20,\ d = 8$ e $e = 17,$ a tabela é da forma:

a	b	c	d	e
$a + 12$	$b + 12$	$c + 12$	$d + 12$	$e + 12$
$a - 4$	$b - 4$	$c - 4$	$d - 4$	$e - 4$
$a + 6$	$b + 6$	$c + 6$	$d + 6$	$e + 6$
$a - 2$	$b - 2$	$c - 2$	$d - 2$	$e - 2$

Então, adicionando cinco números selecionados de linhas e colunas diferentes, obtém-se sempre o valor da expressão $a + b + c + d + e + 12 - 4 + 6 - 2$, que é o mesmo que adicionar os números da primeira linha com as constantes escolhidas aquando do preenchimento da tabela. Neste caso, o valor da soma é:

$$11 + 5 + 20 + 8 + 17 + 12 - 4 + 6 - 2 = 73$$

O mágico pode ainda recorrer a outra estratégia para descobrir o resultado, baseando-se na primeira expressão: $a + b + c + d + e + 12 - 4 + 6 - 2$

$$= a + (b + 12) + (c - 4) + (d + 6) + (e - 2),$$

sendo esta última expressão a soma das diagonais da tabela.

Assim, a resposta que o mágico dá é 73.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escolhe os números destacados na tabela:

11	**5**	20	8	17
23	17	32	**20**	29
7	1	16	4	13
17	11	**26**	14	23
9	3	18	6	**15**

O voluntário fará então a soma: $5 + 20 + 7 + 26 + 15 = 73$.

7.2.4 ACERTAR O RESULTADO

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário, dá-lhe uma calculadora, e, sem ver, dá-lhe as seguintes indicações:

(1) Escreve um número de três algarismos diferentes de zero.

(2) Acrescenta ao número anterior os mesmos algarismos, pela mesma ordem.

(3) Divide o número obtido por 11.

(4) Divide o resultado anterior por 7.

(5) Divide o resultado anterior pelo número que escreveste em (1).

Então, fazendo um esforço mental, o mágico identifica o resultado obtido nesta última operação e que é 13.

EXPLICAÇÃO:

Seja abc o número que o voluntário escolhe inicialmente. Ao acrescentar de novo os três algarismos obtém o número $abcabc$. Este número pode ser escrito na forma $abc000 + abc$, ou seja, $abc(1000 + 1) = 1001 \times abc$. Então este número é múltiplo de 1001. Como $1001 = 7 \times 11 \times 13$, podemos concluir que o número de seis algarismos que o voluntário obteve no ponto (2) é da forma $7 \times 11 \times 13 \times abc$, logo, ao dividi-lo sucessivamente por 11, 7 e abc, só poderá obter 13 como resultado.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escreve o número 359. Então, seguindo as indicações do mágico, escreverá o número 359359 e efetuará os cálculos seguintes: $359359 \div 11 = 32669$; $32669 \div 7 = 4667$; $4667 \div 359 = 13$.

Variante deste truque:

No passo (5) o mágico diz ao voluntário que divida o resultado anterior por 13 e que compare o resultado obtido com o número que escreveu inicialmente.

Obviamente que o número é o mesmo, o que causa grande espanto, sobretudo se o truque for realizado simultaneamente com um grupo de voluntários.

7.2.5 MEMÓRIA DE ELEFANTE

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

Este truque é uma versão mais elaborada do truque “ 5.2.3 Adivinhar a soma “ apresentado no capítulo 5, uma vez que envolve mais conteúdos, nomeadamente expressões algébricas.

PROCEDIMENTO:

O mágico explica que o seu livro preferido é o dicionário da língua portuguesa. (Neste momento o mágico mostra-o, devendo ser uma edição com menos de 1000 páginas). Como tem uma memória fabulosa e já o leu muitas vezes, conhece todas as palavras que ele contém e sabe exatamente onde cada uma se situa. A prova disso está no desafio que se segue. Escolhe então um voluntário e, à vista de todos, dá-lhe as seguintes indicações:

(1) Escreve um número de três algarismos diferentes.
(2) Escreve o número que obténs invertendo a ordem dos algarismos do número anterior.
(3) Subtrai o número menor ao maior. (Se o resultado tiver apenas dois algarismos, o voluntário deve colocar o zero na posição das centenas).
(4) Adiciona o resultado anterior com o número que obténs invertendo a ordem dos seus algarismos.
(5) Procura no dicionário a página correspondente ao número que obtiveste.

Essa página não existe, pois o resultado é superior a 1000. Então o mágico finge algum embaraço e diz ao voluntário que elimine o último algarismo e que procure a página correspondente ao número que resta.

Tendo encontrado a página, o mágico pede-lhe que procure a palavra que está na posição indicada pelo algarismo que foi eliminado, enquanto ele a escreve numa folha. De seguida, pede ao voluntário que leia a palavra do dicionário enquanto ele mostra a folha com a mesma palavra escrita, confirmando assim a sua fabulosa memória!

EXPLICAÇÃO:

O resultado obtido pelo voluntário, no final dos cálculos, é sempre 1089, independentemente do número escrito inicialmente.

Seja $\boldsymbol{abc}$ o número que o voluntário escreve. Este número pode ser escrito na forma $100\,a + 10\,b + c$ (I). Quando se inverte a ordem dos algarismos, o número que se obtém pode ser escrito na forma $100\,c + 10\,b + a$ (II). De seguida subtrai-se o menor ao maior.

Suponhamos que o maior é (I). Então temos:

$$\begin{aligned} 100\,a + 10\,b + c - (100\,c + 10\,b + a) &= 100\,a + 10\,b + c - 100\,c - 10\,b - a \\ &= 99\,a - 99\,c \\ &= 99(a - c) \end{aligned}$$

(Se o número maior fosse (II), o processo seria análogo).

O resultado obtido no passo (3) é então um número múltiplo de nove, sendo que o algarismo das dezenas é sempre 9. Então, a soma dos outros dois algarismos também é necessariamente nove. Isto significa que o referido resultado pode ser escrito na forma $100 \times (9 - x) + 10 \times 9 + x = 100 \times (9 - x) + 90 + x$, sendo x o algarismo das unidades.

Quando se inverte o número anterior, obtém-se o número $100x + 90 + \ (9 - x)$.

Adicionando estes dois números obtém-se:

$$100 \times (9 - x) + 90 + x + 100x + 90 + (9 - x) =$$
$$= 900 - 100x + 90 + x + 100x + 90 + 9 - x = \mathbf{1089}$$

Então, qualquer que seja o número de três algarismos escolhido pelo voluntário, obtém-se sempre o número 1089, pelo que basta que o mágico memorize a nona palavra da página 108 do dicionário.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário escreve o número 914. Então, seguindo as indicações do mágico, o voluntário fará os cálculos seguintes: $914 - 419 = 495$ e $495 + 594 = 1089$.

7.2.6 A TORRE DE DADOS

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário e dá-lhe seis dados normais, com as faces numeradas de 1 a 6. Diz-lhe que os pode rodar como quiser e que deverá formar com todos eles uma única torre, enquanto o mágico se encontra de costas. Posteriormente ele, mágico, irá adivinhar qual é a soma das faces que vão ficar ocultas.

Quando a torre está completa, o mágico vira-se e, rapidamente, divulga a soma de todas as faces ocultas que estão na torre.

EXPLICAÇÃO:

Este truque baseia-se no facto de a soma das faces opostas dos dados normais ser sempre 7. Assim, sendo a torre formada por seis dados, sabemos que a soma das doze faces horizontais é $7 \times 6 = 42$. Como a face superior não está oculta, basta que o voluntário veja qual o número que lhe corresponde e o subtraia a 42.

EXEMPLO:

Vamos supor que a face superior que é visível tem o número 4. Então o mágico subtrai 4 de 42 e revela que a soma das faces ocultas é 38.

Nota: este truque pode ser feito com um número qualquer de dados. Assim, se o mágico utilizar n dados, a soma de todas as faces horizontais será $7n$. Então, a soma das faces ocultas será: $7n - número\ da\ face\ superior$.

7.2.7 A TABELA ÍMPAR

Este truque tem por base a referência bibliográfica [6]

PROCEDIMENTO:

O mágico escolhe um voluntário, dá-lhe uma calculadora e um marcador, e mostra-lhe a tabela seguinte, que contém todos os números naturais até 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

De seguida diz-lhe que escolha e marque, sobre esta tabela, um quadrado com um número ímpar de linhas. Depois disso propõe-lhe o desafio de ver qual dos dois consegue calcular primeiro a soma de todos os números que estão no interior desse quadrado e que serão no total 9, 25, 49 ou 81 números. O voluntário pode usar a calculadora mas o mágico fará os cálculos com papel e lápis.

Obviamente, ganhará o mágico.

EXPLICAÇÃO:

Suponhamos que o voluntário escolhe um quadrado com 7 linhas e designemos por x o número que ocupa a posição central desse quadrado. Então a composição do quadrado será a seguinte:

$x-33$	$x-32$	$x-31$	$x-30$	$x-29$	$x-28$	$x-27$
$x-23$	$x-22$	$x-21$	$x-20$	$x-19$	$x-18$	$x-17$
$x-13$	$x-12$	$x-11$	$x-10$	$x-9$	$x-8$	$x-7$
$x-3$	$x-2$	$x-1$	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$
$x+7$	$x+8$	$x+9$	$x+10$	$x+11$	$x+12$	$x+13$
$x+17$	$x+18$	$x+19$	$x+20$	$x+21$	$x+22$	$x+23$
$x+27$	$x+28$	$x+29$	$x+30$	$x+31$	$x+32$	$x+33$

Ao adicionarmos todas as expressões da tabela, obtemos 49 termos iguais a x e 48 termos numéricos que formam pares simétricos. Portanto a soma reduz-se a $49x$.

Assim, qualquer que seja o quadrado escolhido pelo voluntário, para determinar a soma pedida, basta que o mágico multiplique o número central desse quadrado pela quantidade de números que estão no seu interior, o que se faz rapidamente, dando assim a vitória ao mágico.

EXEMPLO:

Vamos supor que o voluntário marca o quadrado seguinte:

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Enquanto o voluntário adiciona os 25 números que estão no interior do quadrado, o mágico apenas calcula $77 \times 25 = 1925$, uma vez que o número central do quadrado escolhido é 77 e o quadrado tem 25 números.

7.2.8 O CADEADO MÁGICO

PROCEDIMENTO:

Para a realização deste truque é necessário que o mágico tenha consigo um cadeado de 4 dígitos, com o código 1665, e 9 cartões numerados de 1 a 9.

Iniciando o truque, o mágico escolhe quatro voluntários, com a condição de um deles ter um anel. A este, o mágico pede-lhe o anel e prende-o no cadeado, dizendo-lhe que, se quiser recuperar o anel, terá de descobrir o código.

Como não consegue, o mágico diz que os restantes voluntários irão ajudar na descoberta do código. Para isso, distribui a cada um deles três cartões numerados, aparentemente baralhados de forma aleatória, mas na verdade agrupados da seguinte forma:

Voluntário 1 – cartões com os números 1, 5 e 9;

Voluntário 2 – cartões com os números 2, 6 e 7;

Voluntário 3 – cartões com os números 3, 4 e 8.

Depois disso, o mágico dá-lhes as seguintes indicações:

(1) Cada um escolhe a posição que os seus algarismos ocuparão no número que irá ser escrito: centenas, dezenas ou unidades;

(2) Cada um irá escolher um dos seus cartões para, com eles, o mágico escrever um número de três algarismos, respeitando a posição escolhida anteriormente. Depois de o número ter sido escrito, os respetivos cartões são colocados de parte;

(3) O passo anterior repete-se mais duas vezes, ficando os três números escritos por baixo uns dos outros de modo a ser possível efetuar o algoritmo da adição.

(4) O mágico pede então ao quarto voluntário que adicione os três números e desafia-o a experimentar abrir o cadeado usando o código correspondente ao resultado da adição.

Então, magicamente, o cadeado abre-se e o voluntário recupera o seu anel.

EXPLICAÇÃO:

Este truque tem por base um quadrado mágico. Um quadrado mágico é uma matrix quadrada de números distintos, habitualmente inteiros, de tal forma que a soma de cada coluna, de cada linha e das duas diagonais é igual.

Neste caso concreto, o quadrado que está na base do truque é o seguinte, em que a soma das suas colunas (linhas e diagonais) é 15:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Os três cartões dados a cada um dos voluntários têm os três números de cada coluna. Como a soma de cada coluna é igual, é indiferente a posição que cada coluna ocupa no quadrado; o resultado será sempre 1665, independentemente da escolha feita no passo (1).

EXEMPLO:

Vamos supor que o primeiro voluntário escolhe a posição das unidades para os seus algarismos, o segundo escolhe a posição das centenas e o terceiro fica com a posição das dezenas. Suponhamos também que os voluntários selecionam aleatoriamente os seus cartões e que os três números resultantes são: 741, 689 e 235. Então a soma que o quarto voluntário irá fazer é: $741 + 689 + 235 = 1665$, sendo este o código com o qual abrirá o cadeado.

Nota: para este truque não é necessário ter números a formar um quadrado mágico, basta apenas ter 3 conjuntos de números que tenham a mesma soma.

Variante deste truque:

Neste caso é utilizado um cadeado de 3 dígitos e, no final do passo (1), o mágico propõe ao voluntário do anel que “descarte” um dos outros voluntários, à sua escolha. (Se necessário, as posições dos algarismos dos voluntários que ficam são ajustadas).

Então o truque desenvolve-se de forma semelhante e, no final, obtém-se a soma 165, sendo este o código do cadeado.

7.2.9 À DESCOBERTA DO CARTÃO

PROCEDIMENTO:

Para a realização deste truque é necessário um ajudante que conheça todo o procedimento.

Dispõem-se em fila uma quantidade de cartões equivalente a uma potência de 2. (Sugere-se que sejam 8 ou 16, para que o truque não seja demasiado simples nem os cálculos se tornem demasiado complicados).

Neste truque iremos utilizar 8 cartões. Estes cartões podem estar numerados de 1 a 8, sendo que o cartão 8 corresponderá ao número 0. (Podem também ser cartões ilustrados, sem numeração, desde que o verso de cada um seja identificável e as suas posições na fila sejam fixas e numeradas mentalmente pelo mágico e pelo ajudante).

O mágico sai da sala (ou coloca-se de costas) e o ajudante escolhe um voluntário e pede-lhe que escolha um dos cartões e que o identifique. De seguida diz-lhe que pode virar ao contrário os cartões que quiser, incluindo o que escolheu. Depois disso, o ajudante tem a possibilidade de virar um único cartão, após o que o mágico entra na sala (ou vira-se) e, magicamente, adivinha qual foi o cartão escolhido pelo voluntário.

EXPLICAÇÃO:

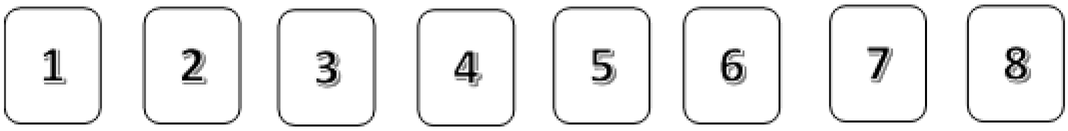
Este truque tem por base a soma NIM. O mágico tem de adivinhar um número x, de 0 a 7, correspondente ao número do cartão escolhido pelo voluntário (ou à sua posição na fila, no caso de se ter utilizado cartões que não estejam numerados).

Depois de o voluntário ter virado ao contrário alguns cartões, os que sobram (ou as suas posições) têm uma certa soma NIM, que se pode designar por y e que varia de 0 a 7. Então, o ajudante terá de virar ao contrário um cartão de modo que a soma NIM dos cartões visíveis (ou das suas posições) seja x e não y. Assim, mentalmente, ele tem de calcular quanto deve somar (NIM) a y para obter x e é o cartão com esse número (ou com essa posição) que tem de ser virado ao contrário.

Como cada elemento é o oposto de si próprio, ao somar ou “subtrair” obtém-se o mesmo resultado. Por isso é indiferente que o cartão necessário esteja já virado ou não, o importante é simplesmente virá-lo.

Exemplo:

Consideremos que são apresentados ao voluntário os cartões seguintes:



Suponhamos que o voluntário escolhe o cartão com o número 6 e decide virar ao contrário os cartões com os números 1, 4 e 8, ficando a sequência da seguinte forma:

Então o ajudante fará a soma NIM dos números visíveis, que corresponde a:

$$\begin{aligned} 2 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 7 &= 10 \oplus 11 \oplus 101 \oplus 110 \oplus 111 \\ &= 101 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Como a soma NIM dos números visíveis é 5, o ajudante terá de lhe adicionar (NIM) 3 para obter o número escolhido pelo voluntário (6), o que corresponde a:

$$101 \oplus 11 = 110$$

Então o ajudante terá de virar o cartão com o número 3, ficando visível para o mágico a seguinte sequência de cartões:

Este apenas fará a soma NIM dos números visíveis, concluindo que essa soma é 6, e adivinhando assim o número do cartão escolhido pelo voluntário.

Capítulo 8

CONCLUSÃO

Qualquer dicionário da língua portuguesa definirá a Matemática como sendo a ciência do raciocínio lógico e abstrato, que estuda quantidades, medidas, espaços, estruturas, variações e estatísticas. As palavras que mais se associam à Matemática são *rigor* e *exatidão*. Nas escolas, a maior parte dos alunos também lhe associa a palavra *difícil*, enquanto os resultados das avaliações internas e externas nos levam a associar-lhe também a palavra *insucesso*.

Compete a toda a sociedade, mas principalmente aos professores de Matemática, substituir as palavras *difícil* e *insucesso* por *agradável* e *recompensador*, mantendo o *rigor* e a *exatidão*. O sucesso não se conquista com o facilitismo do professor mas com o esforço do aluno. E este esforço é tanto menor quanto maior for a motivação para o trabalho a desenvolver. O entusiasmo é a base do "querer aprender", é o elemento essencial para o sucesso, não apenas na Matemática mas em qualquer vertente da nossa vida.

A magia matemática pode ser um excelente aliado do professor na motivação dos alunos. Um bom truque matemático despertará neles a curiosidade suficiente para perguntarem "como?" e "porquê?", questões estas que estão na base de qualquer aprendizagem.

Muitos dos truques aqui apresentados foram realizados na sala de aula, tendo em conta os conteúdos que envolvem. Todos eles provocaram a mesma reação nos alunos: primeiro, espanto e incredulidade. Depois, uma enorme curiosidade em desvendar o truque.

É fundamental que o truque seja bem realizado. Fazer um truque que não resulte é pior do que não fazer nenhum. É necessário prevenir situações para evitar que o truque seja um fracasso. Por exemplo, se os cálculos forem realizados sem calculadora, é conveniente que o voluntário os realize no quadro da sala de aula, com a supervisão do mágico (ou dos colegas da turma, no caso de o mágico se encontrar de costas); é também conveniente que o número pensado pelo voluntário seja do conhecimento de todos os colegas da turma para que eles possam também, não só exercitar o cálculo, mas partilhar a mesma sensação de espanto no final do truque. Para isso, o voluntário pode, por exemplo, escrever num papel o número em que pensou e fazê-lo circular para que todos os colegas o conheçam.

No final de cada truque os alunos querem sempre saber como é que ele é feito, uma vez que eles sabem que o professor não tem poderes especiais. A tendência do professor é explicar o truque, pois explicar é, culturalmente, aquilo que se espera de um professor e aquilo que é intrínseco à sua profissão. Mas aqui o importante é que o professor seja capaz de os deslumbrar o suficiente para que eles sejam capazes de descobrir a Matemática que está por trás. Ao “desmontar” os truques, os alunos estão não só a aplicar e a relacionar conceitos matemáticos, mas também a construir e a consolidar a sua aprendizagem.

A magia que acontece nestes truques é desprovida de efeitos especiais, mas tem efeitos especiais naqueles a quem envolve. É simplesmente magia matemática!

BIBLIOGRAFIA

[1] Gispert, Carlos e outros, Enciclopédia Audiovisual-Educativa: Matemática, Edições Liarte Multimédia, Lisboa, 2010

[2] Pereira, Lívia da Cás e Ferreira, Márcio Violante, "*Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea*"

[3] Sampaio, J. C. e Malagutti, P. L., "Mágicas, Matemática e outros mistérios", Universidade Federal de São Carlos, 2006

[4] Gardner, Martin, "Ah, descobri!", Gradiva – Publicações, Lda., 1990

[5] Gardner, Martin, "Matemática, Magia e Mistério", Gradiva – Publicações, Lda., 1991

[6] Dolz, Miquel Capó, "Magia matemática", Ediciones B, S. A., 2012

[7] Afonso, Paulo, "Xavier e a Magia Matemática", APM, 2010

[8] Gomes, Helena & Martins, Ana, "Números e sistemas de numeração", texto de apoio ao PFCM (ESEV)

[9] Wade H. Sherard, "Mathemagic in the classroom", J. Weston Walch Publisher, 1998, ISBN 0-8251-3818-3, acedido através de: https://books.google.pt/books?id=zgdUQsAr8xUC&lpg=PA120&ots=14D6N2s_E9&dq=Mathemagic%20in%20the%20Classroom&pg=PP1#v=onepage&q&f=false

Websites visitados:

[A] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/suc-fib.htm.

[B] https://en.wikipedia.org

[C] http://www.recreamat.blogs.sapo.pt

[D] http://www.elhuevodechocolate.com/mates/mates2.htm

[E] https://plus.maths.org/content/os/issue38/features/nishiyama/index

[F] http://www.dcc.fc.up.pt/~nam/aulas/0102/pi/trabp1/trabp1_enu/Cartoes_magicos.html

[G] http://pplware.sapo.pt/gadgets/high-tech/sistemas-de-numerao-decimal-binrio-octal-e-hexadecimal/

[H] https://www.youtube.com/watch?v=zdUFDYyYCT0

[I] https://www.youtube.com/watch?v=DJYIndxhcKc

[J] http://jnsilva.ludicum.org/HMR15_16/hmr15_16.html

[K] http://www.atractor.pt/mat/numeros/index.html

[L] https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra